Session 2010 . Eléments de correction

Auteur du document : Gilbert JULIA

Problème 1 : de la vie sur Mars !

1. Le choix de trois cellules « prises au hasard » peut être décrit par l'univers $\{A,\ B,\ C\}^3$ muni de l'équiprobabilité.

On y dénombre 27 triplets, dont 6 sont constitués de trois cellules d'espèces distinctes (le triplet $(A,\ B,\ C)$ et les triplets obtenus en permutant de toutes les façons possibles les trois lettres *A, B, C*.

La probabilité de choisir un triplet de cellules incompatibles étant abc, par complémentarité la probabilité de choisir un triplet de cellules compatibles est $p = 1 - 6abc$.

Compte tenu de la relation $a + b + c = 1$, cette probabilité peut s'exprimer en fonction de deux paramètres, *a* et *b* par exemple : $p = 1 - 6ab(1 - a - b) = 6a^2b - 6ab(1 - b) + 1$

Sous cette forme, *p* se présente comme une expression au second degré en *a* et de paramètre *b*, ce paramètre variant dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, cette expression admet un minimum, lorsque $a = \dfrac{1-b}{2}$. On note que, *b* appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, *a* appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

Ce minimum s'exprime en fonction de *b* et a pour valeur : $m(b) = -\dfrac{3b^3}{2} + 3b^2 - \dfrac{3b}{2} + 1$

IL reste à étudier les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

La dérivée de cette fonction de *b* est la fonction : $m'(b) = -\dfrac{9b^2}{2} + 6b - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3(1-b)}{2}(3b-1)$. Cette fonction dérivée est sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ du signe de $(3b-1)$, c'est-à-dire négative sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right]$. La fonction *b* est strictement décroissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$ puis strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right]$. Elle admet un minimum lorsque $b = \dfrac{1}{3}$. Dans ce cas : $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ et $m\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{9}$.

On en conclut que, quelles que soient les valeurs de *a, b, c*, $p \geq \dfrac{7}{9}$, l'égalité n'ayant lieu que si

$a = b = c = \dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire si les proportions de cellules des trois espèces sont égales.

2. Etude du premier scénario

2.1. Notons de façon générale *a, b, c* les proportions de cellules de type *A, B, C* respectivement.

Il existe sept triplets dans lesquels A est majoritaire :

$(A,\ A,\ A)$, de probabilité a^3

$(A,\ A,\ B)$; $(A,\ B,\ A)$; $(B\ A,\ A)$, tous trois de probabilité $3a^2 b$

$(A,\ A,\ C)$; $(A,\ C,\ A)$; $(C\ A,\ A)$, tous trois de probabilité $3a^2 c$

La probabilité que *A* soit majoritaire est : $P(A\ maj) = a^3 + 3a^2 b + 3a^2 c = a^2(a+3b+3c)$ Compte tenu de la relation $a+b+c=1$, cette probabilité s'exprime en fonction de *a* uniquement : $P(A\ maj) = a^2(3-2a)$

On procède de même pour les sept triplets dans lesquels *B* est majoritaire : $P(B\ maj) = b^2(3-2b)$ et pour les sept triplets dans lesquels *C* est majoritaire : $P(C\ maj) = c^2(3-2c)$

Selon le premier scénario, lorsque les cellules parentes sont compatibles, la cellule fille est de type *A* si et seulement si le type *A* est majoritaire.

La probabilité qu'un descendant soit du type *A* sachant que les trois cellules parentes sont compatibles est la probabilité conditionnelle $P_{compatible}(type\ A) = \dfrac{P(A\ majoritaire)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{a^2(3-2a)}{1-6abc}$.

On obtient de même : $P_{compatible}(type\ B) = \dfrac{P(B\ majoritaire)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{b^2(3-2b)}{1-6abc}$

ainsi que : $P_{compatible}(type\ C) = \dfrac{P(C\ majoritaire)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{c^2(3-2c)}{1-6abc}$.

Par conséquent, si a_n, b_n et c_n sont les proportions de cellules de type *A, B, C* respectivement de la génération numéro *n*, les proportions de cellules de type *A, B, C* de la génération suivante sont données par les relations de récurrence : $a_{n+1} = \dfrac{a_n^{\ 2}(3-2a_n)}{1-6a_n b_n c_n}$; $b_{n+1} = \dfrac{b_n^{\ 2}(3-2b_n)}{1-6a_n b_n c_n}$ et $c_{n+1} = \dfrac{c_n^{\ 2}(3-2c_n)}{1-6a_n b_n c_n}$

2.2. Etudions les $_{gj}$ variations sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ de la fonction : $x \mapsto h(x) = x^2(3-2x)$.

Cette fonction a pour dérivée la fonction : $x \mapsto h'(x) = 6x(1-x)$ qui est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et qui ne s'annule qu'en zéro et en 1. La fonction h est donc une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. Quels que soient les réels x et y de cet intervalle, $x > y \Rightarrow h(x) > h(y)$.

Selon les hypothèses émises à propos de la situation étudiée, $a_0 > b_0 > c_0$ pour la génération initiale.

Par ailleurs, si on suppose que, pour une génération numéro n, $a_n > b_n > c_n$, alors leurs images par la fonction h sont dans le même ordre : $h(a_n) > h(b_n) > h(c_n)$ et en conséquence $a_{n+1} = \dfrac{h(a_n)}{1-6a_n b_n c_n}$;

$b_{n+1} = \dfrac{h(b_n)}{1-6a_n b_n c_n}$; $c_{n+1} = \dfrac{h(c_n)}{1-6a_n b_n c_n}$ sont classées dans le même ordre.

Ainsi, $a_n > b_n > c_n \Rightarrow a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$. La double inégalité est héréditaire.

Pour tout entier naturel n : $a_n > b_n > c_n$

$$(\forall n \in \mathbf{N})\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ a_n > b_n > c_n \end{cases} \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})\begin{cases} 3a_n > 1 > 3c_n \\ 2b_n < 1 - c_n < 1 \end{cases} \text{ et donc } (\forall n \in \mathbf{N})\begin{cases} a_n > \dfrac{1}{3} > c_n \\ b_n < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2.3. Les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de réels strictement positifs puisque $a_n > b_n > c_n$ pour tout entier n.

Pour tout entier naturel n : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{h(a_n) - h(b_n)}{1-6a_n b_n c_n}$. et $a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{h(a_n) - h(c_n)}{1-6a_n b_n c_n}$

Un calcul assez simple montre que pour tout x et tout y de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$h(x) - h(y) = (x-y)(3x + 3y - 2x^2 - 2y^2 - 2xy)$

En vertu de cette identité, $h(a_n) - h(b_n) = (a_n - b_n)(3a_n + 3b_n - 2a_n^{\,2} - 2b_n^{\,2} - 2a_n b_n)$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)\frac{3a_n + 3b_n - 2a_n^{\,2} - 2b_n^{\,2} - 2a_n b_n}{1-6a_n b_n c_n}$$

Et de même : $a_{n+1} - c_{n+1} = (a_n - c_n)\dfrac{3a_n + 3c_n - 2a_n^{\,2} - 2c_n^{\,2} - 2a_n c_n}{1-6a_n b_n c_n}$

Nous allons tenter de montrer que pour tout entier naturel n, les quotients $\dfrac{3a_n + 3b_n - 2a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} - 2a_n b_n}{1 - 6a_n b_n c_n}$ ainsi que $\dfrac{3a_n + 3c_n - 2a_n^{\ 2} - 2c_n^{\ 2} - 2a_n c_n}{1 - 6a_n b_n c_n}$ sont strictement supérieurs à 1.

Essayons de les minorer sachant que $\frac{1}{3} < a_n < 1$, $0 < c_n < \frac{1}{3}$ $0 < b_n < \frac{1}{2}$ et que $1 - 6a_n b_n c_n < 1$

L'expression $3a_n + 3b_n - 2a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} - 2a_n b_n = 3(a_n + b_n) - 2(a_n + b_n)^2 + 2a_n b_n$ est égale à : $3(1 - c_n) - 2(1 - c_n)^2 + 2a_n b_n$.

L'expression $3a_n + 3c_n - 2a_n^{\ 2} - 2c_n^{\ 2} - 2a_n c_n = 3(a_n + c_n) - 2(a_n + c_n)^2 + 2a_n c_n$ est égale à : $3(1 - b_n) - 2(1 - b_n)^2 + 2a_n c_n$.

Or une étude de la fonction du second degré $x \mapsto 3x - 2x^2$ fait apparaître que $3x - 2x^2 = \frac{9}{8} - 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ et qu'en conséquence, $3x - 2x^2 \geq 1$ pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Vu que $\frac{2}{3} < (1 - c_n) < 1$ et que $\frac{1}{2} < (1 - b_n) < 1$ quel que soit l'entier n, $3(1 - c_n) - 2(1 - c_n)^2 > 1$ et $3(1 - b_n) - 2(1 - b_n)^2 > 1$.

Pour tout entier n : $\dfrac{3a_n + 3b_n - 2a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2} - 2a_n b_n}{1 - 6a_n b_n c_n} > 1$ et $\dfrac{3a_n + 3c_n - 2a_n^{\ 2} - 2c_n^{\ 2} - 2a_n c_n}{1 - 6a_n b_n c_n} > 1$

Donc pour tout entier n : $(a_{n+1} - b_{n+1}) > (a_n - b_n)$ et $(a_{n+1} - c_{n+1}) > (a_n - c_n)$

Les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont toutes deux strictement croissantes.

Les deux suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont aussi des suites majorées (par exemple, 1 est un majorant de chacune des deux suites). Ces deux suites convergent.

Ces deux suites étant strictement croissantes et convergentes, leur suite somme $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}} + (a_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}} = (2a_n - b_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est elle aussi strictement croissante et convergente.

Or, cette suite n'est autre que la suite $(3a_n - 1)_{n\in\mathbf{N}}$ puisque pour tout entier n : $a_n + b_n + c_n = 1$.

Donc, la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est elle-même strictement croissante et convergente. Elle converge vers une limite a telle que $1 \geq a > \dfrac{1}{3}$.

Si la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors en tant que suites différences de deux suites convergentes, les suites $\left(b_n\right)_{n\in\mathbf{N}} = \left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}} - \left(a_n - b_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(c_n\right)_{n\in\mathbf{N}} = \left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}} - \left(a_n - c_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, sont elles aussi convergentes.

Soient b, c leurs limites respectives.

En passant aux limites dans les relations de récurrence, il apparaît que le triplet (a, b, c) est solution de :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^2(3-2x)}{1-6x\,y\,z} \\ y = \dfrac{y^2(3-2y)}{1-6x\,y\,z} \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

. De plus, ce triplet doit vérifier : $\dfrac{1}{3} < a \leq 1$; $0 \leq b \leq \dfrac{1}{2}$; $0 \leq c \leq \dfrac{1}{3}$ (toutes inégalités au sens large sauf une, la première écrite)

Il s'agit en fin de compte de résoudre un système se ramenant à deux équations : $\begin{cases} x = \dfrac{x^2(3-2x)}{1-6x\,y(1-x-y)} \\ y = \dfrac{y^2(3-2y)}{1-6x\,y\,(1-x-y} \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>Un solveur fournit les solutions ci-contre.

Parmi toutes les solutions affichées, deux sont compatibles avec le contexte et les inégalités contraignantes, et amènent à :
$a=1$; $b=c=0$.
Ce sont « x=0 and y=0 » et « x=0 and y=1 »</td>
<td>solve$\left(\begin{cases} x=\dfrac{x^2\cdot(3-2\cdot x)}{1-6\cdot x\cdot y\cdot(1-x-y)} \\ y=\dfrac{y^2\cdot(3-2\cdot y)}{1-6\cdot x\cdot y\cdot(1-x-y)} \end{cases},\{x,y\}\right)$
$x=\frac{-1}{2}$ and $y=\frac{-1}{2}$ or $x=\frac{-1}{2}$ and $y=2$ or $x=0$ and $y=0$ or $x=0$ and $y=\frac{1}{2}$ or $x=0$ and $y=1$▸
$x=\frac{1}{3}$ and $y=\frac{1}{3}$ or $x=\frac{1}{2}$ and $y=0$ or $x=\frac{1}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$ or $x=1$ and $y=0$ or $x=2$ and $y=\frac{-1}{2}$
$x=\frac{1}{3}$ and $y=\frac{1}{3}$ or $x=\frac{1}{2}$ and $y=0$ or $x=\frac{1}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$ or $x=1$ and $y=0$ or $x=2$ and $y=\frac{-1}{2}$
or $x=\frac{1}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$ or $x=1$ and $y=0$ or $x=2$ and $y=\frac{-1}{2}$</td>
</tr>
</table>

Voici un exemple d'étude du comportement de ces suites lorsque les proportions initiales sont 0,334 ; 0,336 ; 0,3324.

Selon ce scénario, un écart initial même très faible entre les trois espèces aboutit après quelques générations (20 générations sur l'exemple ci-contre) à l'extinction quasi-totale des deux espèces minoritaires.

	A u	B v	C w	D	E
◆					
1	0.334	0.3336	0.3324		
2	0.334476	0.33379	0.331734		
3	0.335292	0.334115	0.330593		
4	0.336691	0.334668	0.32864		
5	0.339089	0.335609	0.325302		
6	0.343197	0.337196	0.319607		
7	0.350228	0.339842	0.30993		
8	0.362235	0.344151	0.293614		
9	0.382611	0.35085	0.26654		
10	0.416583	0.360248	0.223169		
11	0.470603	0.370229	0.159168		
12	0.546967	0.371534	0.081499		
13	0.633161	0.345916	0.020923		
14	0.71467	0.283999	0.001332		
15	0.803522	0.196473	0.000005		
16	0.899363	0.100637	8.50125E-11		
17	0.971655	0.028345	2.16814E-20		
18	0.997635	0.002365	1.41025E-39		
19	0.999983	0.000017	5.96639E-78		
20	1.	8.41612E-10	1.06793E-154		
21					
D1					

2. Etude du deuxième scénario

2.1. Notons de façon générale *a, b, c* les proportions de cellules de type *A, B, C* respectivement.

Outre le triplet compatible $(A,\ A,\ A)$, de probabilité a^3

Il existe six triplets dans lesquels A est minoritaire :

$(A,\ B,\ B)$; $(B,\ B,\ A)$; $(B\ \ A,\ B)$, tous trois de probabilité $3ab^2$

$(A,\ C,\ C)$; $(C,\ C,\ A)$; $(C\ \ A,\ C)$, tous trois de probabilité $3ac^2$

La probabilité qu'un descendant soit A est : $P(A\ \min) = a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 = a\left(a^2 + 3b^2 + 3c^2\right)$

La probabilité qu'un descendant soit B est : $P(B\ \min) = b\left(b^2 + 3a^2 + 3c^2\right)$ et pour les sept triplets dans La probabilité qu'un descendant soit C est majoritaire : $P(C\ \min) = c\left(c^2 + 3a^2 + 3b^2\right)$

Selon le premier scénario, lorsque les cellules parentes sont compatibles, la cellule fille est de type A si et seulement si le type A est $_{gj}$ majoritaire.

La probabilité qu'un descendant soit du type *A* sachant que les trois cellules parentes sont compatibles est la probabilité conditionnelle $P_{compatible}(type\ A) = \dfrac{P(A\ \min)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{a(a^2+3b^2+3c^2)}{1-6abc}$.

On obtient de même : $P_{compatible}(type\ B) = \dfrac{P(B\ \min)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{b(b^2+3a^2+3c^2)}{1-6abc}$

ainsi que : $P_{compatible}(type\ C) = \dfrac{P(C\ \min)}{P(parents\ compatibles)} = \dfrac{c(c^2+3a^2+3b^2)}{1-6abc}$.

Par conséquent, si a_n, b_n et c_n sont les proportions de cellules de type *A, B, C* respectivement de la génération numéro *n*, les proportions de cellules de type *A, B, C* de la génération suivante sont données par les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2+3b_n^2+3c_n^2)}{1-6a_n b_n c_n} \ ; \ b_{n+1} = \frac{b_n(b_n^2+3c_n^2+3a_n^2)}{1-6a_n b_n c_n} \ \text{ et } c_{n+1} \underset{gilbertjulia}{=} \frac{c_n(c_n^2+3a_n^2+3b_n^2)}{1-6a_n b_n c_n}$$

Selon les hypothèses émises à propos de la situation étudiée, $1 > a_0 > b_0 > c_0$ pour la génération initiale.

Par ailleurs, si on suppose que, pour une génération numéro *n*, $1 > a_n > b_n > c_n > 0$, alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} \underset{gj}{=} \frac{a_n^3 - b_n^3 + 3a_n b_n(b_n - a_n) + 3c_n^2(a_n - b_n)}{1-6a_n b_n c_n} \text{ c'est-à-dire que :}$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)\frac{a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n + 3c_n^2}{1-6a_n b_n c_n} = (a_n - b_n)\frac{(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2}{1-6a_n b_n c_n}$$

Le quotient $\dfrac{(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2}{1-6a_n b_n c_n}$ étant strictement positif pour toute valeur de *n*, la différence $a_{n+1} - b_{n+1}$ est du même signe que sa précédente $a_n - b_n$ quelle que soit la valeur de *n*.

De même : $b_{n+1} - c_{n+1} = (b_n - c_n)\dfrac{(b_n - c_n)^2 + 3a_n^2}{1-6a_n b_n c_n}$, la différence $b_{n+1} - c_{n+1}$ est du même signe que sa précédente $b_n - c_n$ quelle que soit la valeur de *n*

Pour tout entier *n*, $a_n > b_n > c_n \Rightarrow a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$. La double inégalité est héréditaire.

Pour tout entier naturel *n* : $a_n > b_n > c_n$

Il reste à vérifier que $c_n > 0$, ce qui est le cas par récurrence évidente :

$$c_n > 0 \Rightarrow \frac{c_n(c_n^2+3a_n^2+3b_n^2)}{1-6a_n b_n c_n} \geq \frac{7}{9}c_n(c_n^2+3a_n^2+3b_n^2) > 0$$

Et enfin que $1 > a_n$ pour toute valeur de *n*. Etudions un lien éventuel entre la différence $1-a_{n+1}$ et sa précédente $1-a_n$:

$$1-a_{n+1}=1-\frac{a_n\left(a_n^{\ 2}+3b_n^{\ 2}+3c_n^{\ 2}\right)}{1-6a_n\,b_n\,c_n}=\frac{1-6a_n\,b_n\,c_n-a_n\left(a_n^{\ 2}+3b_n^{\ 2}+3c_n^{\ 2}\right)}{1-6a_n\,b_n\,c_n}$$

En considérant que $c_n=1-a_n-b_n$, on obtient :

$$1-a_{n+1}=1-\frac{a_n\left(a_n^{\ 2}+3b_n^{\ 2}+3c_n^{\ 2}\right)}{1-6a_n\,b_n\,c_n}=\frac{1-3a_n+6a_n^{\ 2}-4a_n^{\ 3}}{1-6a_n\,b_n\,c_n}=\frac{(1-a_n)\left(1-2a_n+4a_n^{\ 2}\right)}{1-6a_n\,b_n\,c_n}$$

L'expression du second degré $1-2a_n+4a_n^{\ 2}$ est toujours strictement positive (son discriminant est strictement négatif) donc $1-a_{n+1}$ est strictement du même signe que son prédécesseur $1-a_n$
Puisque initialement $1-a_0>0$, pour tout entier naturel *n* : $1-a_n>0$

3.3. *Une variante :* Proposons nous d'étudier le sens de variation de deux de ces suites.

Pour cela, nous allons considérer, pour tout entier naturel *n* les expressions : $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{a_n^{\ 2}+3b_n^{\ 2}+3c_n^{\ 2}}{1-6a_n\,b_n\,c_n}-1$ et $\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n}=\dfrac{c_n^{\ 2}+3a_n^{\ 2}+3b_n^{\ 2}}{1-6a_n\,b_n\,c_n}-1$

Les trois réels a_n, b_n, c_n étant liés par la relation $a_n+b_n+c_n=1$, il sera possible de construire des expressions équivalentes en fonction de deux des trois réels a_n, b_n, c_n.

Définissons généralement la fonction de trois variables *x, y, z* : $f(x,y,z)=\dfrac{x\left(x^2+3y^2+3z^2\right)}{1-6xyz}$

Alors : $\dfrac{f(x,y,z)}{x}-1=\dfrac{x^2+3y^2+3z^2+6xyz-1}{1-6xyz}$

Puis définissons la fonction de deux variables *x, y* :

$$g(x,y)=\frac{f(x,y,1-x-y)}{x}-1=\frac{x^2(4-6y)-6x(1-y)^2+\left(2-6y+6y^2\right)}{1-6xy\,(1-x-y)}$$

Cette expression se factorise : $g(x,y)=\dfrac{(4-6y)(1-x)\left(\dfrac{1-3y+3y^2}{2-3y}-x\right)}{1-6xy\,(1-x-y)}$

On note que pour *y* vérifiant $0<y<\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1-3y+3y^2}{2-3y}<\dfrac{1}{2}$. De plus, dans ces conditions $4-6y>0$.

- Appliquons ces résultats au cas de $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=g\left(a_n,b_n\right)$. Compte tenu des inégalités $a_n>b_n>c_n>0$, $0<b_n<\dfrac{1}{2}$ et $a_n>\dfrac{1}{2}$. Dans ces conditions, $g\left(a_n,b_n\right)<0$ pour tout entier n : la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante.

- Appliquons ces résultats au cas de $\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n}=g\left(c_n,b_n\right)$. Compte tenu des inégalités $a_n>b_n>c_n>0$, $0<c_n<\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}<b_n<\dfrac{1}{2}$. Dans ces conditions, $g\left(c_n,b_n\right)>0$ pour tout entier n : la suite $\left(c_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante, elle converge vers une limite c vérifiant $0<c\le\dfrac{1}{3}$.

Les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(c_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont strictement monotones et bornées : elles convergent.

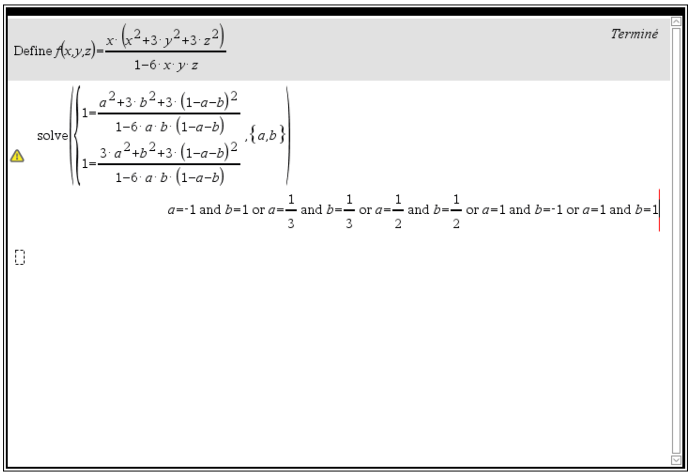
- La suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite a vérifiant $a\ge\dfrac{1}{3}$.
- La suite $\left(c_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite c vérifiant $0<c\le\dfrac{1}{3}$.

Si ces deux suites sont convergentes, la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est elle aussi convergente, vers une limite b vérifiant $0<c\le b\le a<1$ et telle que $a+b+c=1$

Les réels a et b sont solution d'un système de deux équations dont un solveur donne les solutions ci-contre.

Parmi les solutions affichées, une seule est compatible avec les inégalités contraignantes.
Il s'agit de « a=((1)/(3)) and b=((1)/(3)) », c'est-à-dire que $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Selon ce scénario, les proportions de cellules des trois espèces tendent vers un équilibre d'équirépartition.



Un exemple avec des populations initiales déséquilibrées. Les espèces *A* et *C* sont en colonnes **u** et **v** respectivement.

On est amené à conjecturer que la suite des proportions de l'espèce intermédiaire *B*, en colonne **v**, est peut-être ni croissante ni décroissante mais plutôt sujette à des oscillations (?).

	A u	B v	C w	D	E	F
=						
1	0.8	0.15	0.05			
2	0.593361	0.303423	0.103216			
3	0.440919	0.403058	0.156023			
4	0.399226	0.395844	0.20493			
5	0.374332	0.373803	0.251866			
6	0.355853	0.355725	0.288422			
7	0.344404	0.344363	0.311232			
8	0.338407	0.338392	0.323202			
9	0.335575	0.335569	0.328856			

A3 0.44091889535265

Le « bon scénario » est certainement le deuxième. Si une « vie sur Mars » existait, elle serait selon toute probabilité très ancienne. Si le premier scénario était le bon, il y aurait belle lurette que deux des trois espèces seraient éteintes.

Problème 2: « Vite pile »

Le « lancer de pièce » n'est dans ce problème qu'un habillage. Retenons qu'on procède à des essais d'une épreuve à deux issues, « Pile » représentant l'une de ces deux issues, celle que l'on recherche particulièrement. La probabilité p peut être n'importe quel réel de l'intervalle $]0\,;1[$.

Posons $q = 1 - p$ pour alléger certaines expressions.

Pour les questions **2** et **3**, on supposera que les k joueurs lancent tour à tour la pièce de monnaie. On appellera « tour de table » le fait que, tour à tour, chaque joueur procède à un lancer.
Le nombre des joueurs ayant obtenu « Pile » au cours d'un même « tour de table » est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

Rien n'empêche non plus de supposer que chaque joueur effectue obstinément les lancers auxquels il a droit, au moins jusqu'à son premier « Pile », même s'il y a des gagnants avant lui. (Ceci, pour pouvoir calculer son score).

1. Soit S la variable aléatoire « score d'un joueur donné ». Cette variable aléatoire prend les valeurs entières depuis 0 (cas où le joueur obtient « Pile » dès son premier essai : son temps d'attente du premier « Pile » est nul) jusqu'à n (le joueur, malchanceux, a effectué tous les essais permis sans jamais avoir obtenu « Pile »).

Pour tout entier i tel que $0 \le i < n$, l'évènement $"S = i"$ est réalisé lorsque le joueur a obtenu i fois consécutivement « Face » et ensuite, lors du $(i+1)^{ème}$ lancer, pour la première fois « Pile ».

L'évènement $"S = n"$ est quant à lui réalisé lorsque le joueur a obtenu n fois consécutivement « Face ».

Les essais étant indépendants, la loi de probabilité de S est :

- Pour $0 \le i < n$, $P(S = i) = q^i \times p$
- $P(S = n) = q^n$

Vérification possible :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} q^i \times p + q^n = p \times \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = p \times \frac{1-q^n}{p} + q^n = 1\,.$$

La somme des probabilités des évènements $"S = i"$, pour $i = 0, \ldots, n$ est bien égale à 1.

2. *Deux méthodes de résolution différentes sont proposées*

Première méthode

Numérotons les « tours de table » de 1 à n. Notons U_j $(1 \le j \le n)$ l'évènement : « Il survient un unique gagnant lors du « tour de table » numéro j ». Cet évènement est réalisé si et seulement si aucun joueur n'a obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents et, au cours du « tour de table » numéro j, exactement un des joueurs obtient « Pile ».

- La probabilité que aucun des joueurs n'ait obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents est égale à $\left(q^k\right)^{j-1} = q^{k\,j-k}$. (Il y a eu en effet $k \times (j-1)$ lancers de pièce).
- La probabilité que exactement un des joueurs obtienne « Pile » lors du « tour de table » numéro j est égale à $k \times p \times q^{k-1}$ (probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$ prenne la valeur 1).

En raison de l'hypothèse d'indépendance des lancers, les deux évènements ci-dessus sont indépendants, la probabilité que survienne un unique gagnant lors du « tour de table » numéro j est le produit des deux probabilités. C'est le produit : $\left(k \times p \times q^{k-1}\right) \times \left(q^{k\,j-k}\right) = k \times p \times q^{k\,j-1}$

On retient que : $P\left(U_j\right) = k \times p \times q^{k\,j-1}$

Il peut éventuellement survenir un unique gagnant lorsque $j=1$ ou $j=2$, …, ou $j=n$.

L'évènement « Il y a un unique gagnant » est la réunion $\bigcup\limits_{j=1}^{j=n} U_j$.

Il s'agit là d'une réunion d'évènements disjoints. La probabilité qu'il y ait un unique gagnant, quel que soit le numéro du « tour de table » auquel il survient, est égale à la somme de leurs probabilités :

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{j=n} U_j\right) = \sum_{j=1}^{j=n} k \times p \times q^{k\,j-1} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} \frac{k\,p}{q} \sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j} = k \times p \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}$$

Vu que $0 < q < 1$, la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini est $k \times p \times q^{k-1} \times \dfrac{1}{1-q^k}$

Deuxième méthode

Numérotons de 1 à k les différents joueurs.

Notons V_i l'évènement « Le joueur numéro i est unique gagnant de la partie », pour $i = 1, 2, ..., k$.

Le joueur numéro i est unique gagnant lors du « tour de table » numéro j ($1 \leq j \leq n$) si son score est $j-1$ alors que personne d'autre n'a obtenu pile (même pas au tour j).

- La probabilité que son score soit $j-1$ est $q^{j-1} \times p$
- La probabilité qu'aucun des $k-1$ autres joueurs n'ait obtenu pile, même pas au tour j, est $\left(q^{j}\right)^{k-1} = q^{k\,j-j}$

La probabilité que le joueur numéro i soit unique gagnant lors du « tour de table » j est le produit des deux probabilités $\left(q^{j-1} \times p\right) \times \left(q^{k\,j-j}\right) = p \times q^{k\,j-1}$

L'évènement V_i est la réunion, pour $j = 1, 2, ..., n$ des évènements ci-dessus décrits, évènements qui s'excluent mutuellement. La probabilité de V_i est la somme de leurs probabilités.

$$P(V_i) = \sum_{j=1}^{j=n} p \times q^{k\,j-1} = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j} \underset{gjulia}{=} \frac{p}{q} \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}.$$

Cette probabilité ne dépend pas de i, c'est la même pour chacun des k joueurs.

L'évènement « Il y a un unique gagnant » (quel que soit son numéro) est la réunion $\bigcup_{i=1}^{i=k} V_i$. Ces évènements sont disjoints : il ne peut pas y avoir plusieurs « uniques gagnants » en même temps.

La probabilité de la réunion de ces évènements est la somme de leurs probabilités :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=k} V_i\right) = k \times \frac{p}{q} \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}$$

On retrouve, ce qui est rassurant, le résultat obtenu par la méthode précédente.

NB. Ces deux méthodes procèdent d'une même stratégie, souvent efficace dans des problèmes de dénombrement et dans des calculs de probabilités. Pour dénombrer un ensemble, ou pour calculer la probabilité d'un évènement, il s'avère parfois pratique de réaliser une partition de cet ensemble (de cet évènement) en parties disjointes, selon un critère de tri à identifier. Il est intéressant de voir qu'ici deux critères de tri différents aboutissent.

3. *Deux méthodes de résolution différentes sont proposées*

Première méthode : On procède à peu près comme à la première méthode la question **2.**

Définissons la variable aléatoire X = « nombre de gagnants » de la partie ». Cette variable peut prendre les valeurs entières de 0 (aucun des joueurs n'obtient jamais « Pile ») à k (tous les joueurs obtiennent « Pile » au même « tour de table »).

Pour mémoire, l'évènement « $X=0$ » a pour probabilité $q^{k\,n}$ (mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat). Dans la question précédente, nous avons calculé la probabilité de l'évènement « $X=1$ ».

Soit x un entier tel que $1 \le x \le k$. Proposons-nous de chercher de façon générale la probabilité de l'évènement « $X = x$ ».

Désignons par $U(x,\ j)$ $(1 \le x \le k)$ l'évènement : « Il survient exactement x gagnants lors du « tour de table » numéro j ». Cet évènement est réalisé si et seulement si aucun joueur n'a obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents et, au cours du « tour de table » numéro j, exactement x joueurs obtiennent « Pile ».

- La probabilité que aucun des joueurs n'ait obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents est égale à $\left(q^k\right)^{j-1} = q^{k\,j-k}$.
- La probabilité que exactement x joueurs $(1 \le x \le k)$ obtiennent « Pile » au cours du « tour de table » numéro j est est égale à $\binom{k}{x} p^x\, q^{k-x}$ (probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$ prenne la valeur x).

La probabilité qu'il y ait exactement x gagnants lors du « tour de table » numéro j est le produit des deux probabilités, c'est-à-dire : $P(U(x,\ j)) = \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times q^{k\,j-k}$. Laissons cette expression en l'état …

Il peut survenir x gagnants lorsque $j=1$ ou $j=2$, …, ou $j=n$.

L'évènement « $X = x$ » est la réunion : $["X = x"] = \bigcup_{j=1}^{j=n} U(x,\ j)$. Il s'agit là d'une réunion d'évènements disjoints.

La probabilité qu'il y ait x gagnants de la partie, quel que soit le numéro du « tour de table » auquel la parie se termine, est égale à la somme de ces probabilités :

$$P[X = x] = \sum_{j=1}^{j=n}\left[\binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times q^{k\,j-k}\right]_{gjulia} = \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j-k} = \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}$$

L'espérance mathématique du nombre de gagnants est la somme :

$$\sum_{x=0}^{x=k}\left(x \times P[X = x]\right) = \sum_{x=1}^{x=k}\left[x \times \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}\right] = \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k} \times \sum_{x=1}^{x=k}\left[x \times \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x}\right]$$

La somme qui apparaît dans cette dernière expression représente l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$. Elle est égale à $k\ p$.

L'espérance mathématique du nombre de gagnants est de ce fait $k \times p \times \dfrac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}$

Vu que $0 < q < 1$, la limite de cette espérance lorsque n tend vers l'infini est $k \times \dfrac{p}{1-q^{k}}$

Deuxième méthode : on reprend la deuxième méthode de la question **2**, puis on s'en écarte sensiblement.

Numérotons de 1 à k les différents joueurs.

Un joueur donné est gagnant (pas forcément unique) lors du « tour de table » numéro j ($1 \le j \le n$) si son score est $j-1$ alors que personne d'autre n'a obtenu pile avant lui.

- La probabilité que son score soit $j-1$ est $q^{j-1} \times p$
- La probabilité qu'aucun des $k-1$ autres joueurs n'ait obtenu pile avant lui est $\left(q^{j-1}\right)^{k-1} = q^{k\,j-j-k+1}$

La probabilité que ce joueur donné soit gagnant (pas forcément unique) lors du « tour de table » j est le produit des deux probabilités $\left(q^{j-1} \times p\right) \times \left(q^{k\,j-j-k+1}\right) = p \times q^{k\,j-k}$

La probabilité que ce joueur soit gagnant lors d'un quelconque « tour de table » est égale à la somme : $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j-k} \times p \underset{gilbertjulia}{=} \sum_{j-1=0}^{j-1=n-1} q^{k(j-1)} \times p = p \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}$.

Cette probabilité est la même pour chacun des k joueurs.

Cependant les évènements « le joueur numéro i est gagnant » pour $i = 1,\ 2, ...,\ k$ ne sont pas des évènements incompatibles, il peut y avoir plusieurs gagnants en même temps.

C'est la raison pour laquelle on raisonnera désormais en termes d'espérance. L'espérance a une propriété majeure : elle est linéaire et, en particulier, l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances, quelles que soient les circonstances.

Désignons par G_i la variable aléatoire qui vaut 1 si joueur numéro i gagne la partie et 0 sinon ($i = 1,\ 2, ...,\ k$).

L'espérance mathématique de G_i est : $E(G_i) \underset{gilbertjulia}{=} 1 \times \left(p \times \dfrac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}\right) + 0 \times \left(1 - p \times \dfrac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}\right) = p \times \dfrac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}$

La variable aléatoire somme $G_1 + ... + G_k$ représente le nombre de joueurs gagnants.

L'espérance mathématique du nombre de joueurs gagnants est la somme des espérances des variables aléatoires G_i étendue à l'ensemble des k joueurs.

$$E(G_1 + G_2 + ... + G_k) = E(G_1) + ... + E(G_k) = k \times \left(p \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^{k}}\right)$$

On retrouve, ce qui est rassurant, le résultat obtenu par la méthode précédente.

Problème 3 : chiffres et lettres

Soit d un entier strictement positif.
- Un mot est un bloqueur de d si toute attribution de ce mot est un nombre non divisible par d.
- Un mot n'est pas un bloqueur de d s'il existe une attribution de ce mot divisible par d.

Ce nombre d est « mauvais » s'il admet au moins un bloqueur, c'est-à-dire s'il existe un mot dont toute attribution est non divisible par d.

Ce nombre d est « bon » s'il n'admet aucun bloqueur, c'est-à-dire si tous les mots ont au moins une attribution divisible par d.

1. Les attributions de AB sont tous les entiers à deux chiffres qui s'écrivent avec deux chiffres distincts : 10, 12, …, 21, 23, … 98 c'est-à-dire tous les entiers compris entre 01 et 98 à l'exception de 11, 22, 33, …, 88.

Soit d un entier s'écrivant avec au moins trois chiffres ($d \geq 100$). À l'exception de zéro, tous les multiples de d s'écrivent avec au moins autant de chiffres que d.

L'unique multiple d'un tel entier qui soit compris entre 0 et 99 est l'entier zéro qui n'est pas une attribution de AB. Toute attribution de AB est un nombre non divisible par d.

Donc AB est un bloqueur de tout entier ≥ 100. Tous les entiers supérieurs ou égaux à 100 sont mauvais.

2.1. Quel que soit le mot ω, de dernière lettre x, toutes ses attributions telles que $x = 0$ sont divisibles par 10. L'entier 10 n'admet aucun bloqueur, il est bon.

2.2. Les entiers divisibles par 8 sont ceux dont l'entier représenté par ses trois derniers chiffres est lui même divisible par 8.

Pour savoir si 8 est bon ou non, il suffit de tester les mots ω s'écrivant avec trois lettres. Possèdent-ils tous une attribution divisible par 8 ?

Il y a cinq mots à trois lettres qui sont *AAA, AAB, ABA, BAA, ABC*.

Or par exemple, les entiers 000 ou 888, 008 ou 448, 080 ou 808, 400 ou 800, 016 ou 056 sont, respectivement, des attributions des mots de trois lettres *AAA, AAB, ABA, BAA, ABC*.
Toutes ces attributions sont divisibles par 8. Il en résulte que 8 n'admet pas de bloqueur. Il est bon.

2.3. Un entier divisible par 27 est *a fortiori* divisible par 9.

Les attributions de AAB qui sont divisibles par 9 sont celles dont la somme des chiffres est multiple de 9 : 009, 117 = 13×9, 225 = 25×9, 441 = 49×9, 558 = 62×9, 774 = 86×9, 882 = 98×9, 990 = 110×9. (333, 666 ou 999 ne conviennent pas, deux chiffres distincts sont requis).

Aucune d'entre elles n'est divisible par 27 (en effet, aucun des diviseurs complémentaires 13, 25, 49, 62, 86, 98 ou 110 n'est un multiple de 3). Il en résulte que AAB est un bloqueur de 27.

Le nombre 27 est mauvais.

2.4. Soient *a, b* deux chiffres distincts et $\overline{abbab}$ l'attribution de *ABBAB* associée. Cet entier est divisible par 32 si et seulement si $\overline{abbab} \equiv 0 \quad (32)$.

Or : $\overline{abbab} = a\times 10010 + b\times 1101 \equiv 26a + 13b \quad (32)$.
(En effet : $10010 = 312\times 32 + 26$ et $1101 = 34\times 32 + 13$)

On remarque que $26a + 13b = 13(2a+b)$.
Les entiers 13 et 32 étant deux entiers premiers entre eux : $13(2a+b) \equiv 0$ (32) $\Leftrightarrow$ $2a+b \equiv 0 \ (32)$

Or, il n'existe aucun couple de chiffres distincts tels que $2a+b$ soit divisible par 32 (en effet l'entier $2a+b$ est nécessairement compris entre $2\times 0+1=1$ et $2\times 9+8=26$, aucun de ces entiers n'est divisible par 32). Donc, aucune attribution de *ABBAB* n'est divisible par 32, ce mot est un bloqueur de 32.

Le nombre 32 est mauvais.

2.5. 32 est mauvais alors que l'un de ses diviseurs, en l'occurrence 8, est bon. Un diviseur positif d'un nombre mauvais n'est pas nécessairement mauvais.

Soit *b* un nombre bon et *u* un diviseur positif de *b*. Tous les mots ont au moins une attribution divisible par *b* et cette attribution est *a fortiori* divisible par le diviseur de *b* qu'est l'entier *u*. Donc tout diviseur positif d'un nombre bon est bon.

Par contraposition, tous les multiples d'un nombre mauvais sont mauvais.

3.1. On remarque que dans le mot ω de cette question, chacune des dix lettres disponibles apparaît au moins une fois, neuf d'entre elles apparaissant une fois et une seule..

Si on considère une attribution *a* de ω, les chiffres *J, I, …, B* sont exactement ceux de rangs respectifs $p-1$; $2(p-1)$; ...;$9(p-1)$ dans l'écriture de *a*.

Il s'ensuit que le premier chiffre à droite de chacun des 10 blocs « A^{p-2} » est associé à des puissances remarquables de dix :10^0 ; 10^{p-1} ;....;$10^{9(p-1)}$.

$$a = \left(AAA^{p-2}\right)\times 10^{9(p-1)} + \left(BA^{p-2}\right)\times 10^{8(p-1)} + ... + \left(IA^{p-2}\right)\times 10^{p-1} + \left(JA^{p-2}\right)$$

Puisque *p* est un nombre premier distinct de 2 et de 5, d'après le petit théorème de Fermat, chacune de ces puissances 10^0 ; 10^{p-1} ;....;$10^{9(p-1)}$ est congrue à 1 modulo *p*.

En conséquence : $a \equiv \left(AAA^{p-2}\right) + \left(BA^{p-2}\right) + \left(CA^{p-2}\right) + ... + \left(JA^{p-2}\right) \ (p)$

On note d'une part que $\left(AAA^{p-2}\right) = A\times 10^p + \left(AA^{p-2}\right) \equiv 10A \ \ (p)$ (les parenthèses pour $\left(AAA^{p-2}\right)$ et $\left(AA^{p-2}\right)$désignent ici des écritures en numération décimale).

Nous sommes d'autre part amenés à étudier particulièrement les attributions d'un mot de la forme $\left(XA^{p-2}\right)$.
Si *b* est une telle attribution : $b = \left(1 + 10 + ... + 10^{p-3}\right)A + 10^{p-2}X$

D'après le petit théorème de Fermat, $10^{p-1}-1=9\left(1+10+10^2+...+10^{p-2}\right)$ est divisible par *p*.

Puisque *p* est par hypothèse un nombre premier supérieur ou égal à 7, il est premier avec 9, donc (théorème de Gauss) il divise $1+10+10^2+...+10^{p-2}$

Ainsi : $1+10+10^2+...+10^{p-3}+10^{p-2}\equiv 0\ (p)$ c'est-à-dire que $1+10+10^2+...+10^{p-3}\equiv -10^{p-2}\ (p)$.

On en déduit : $b\equiv (X-A)10^{p-2}\ (p)$

En appliquant ce résultat à chacun des neuf mots $\left(BA^{p-2}\right);\left(CA^{p-2}\right);...+\left(JA^{p-2}\right)$:

$a\equiv 10A+\left((B-A)+(C-A)+...+(J-A)\right)10^{p-2}\ \ (p)$ et finalement $a\equiv (A+B+C+...+J)10^{p-2}\ \ (p)$

La somme des dix chiffres de la numération décimale $0+1+2+...+9$ étant égale à 45 :
$a\equiv 45\times 10^{p-2}\ \ (p)$, et lorsque *p* est un nombre premier supérieur ou égal à 7, l'entier $45\times 10^{p-2}$ est premier avec *p* puisque les facteurs premiers de $45\times 10^{p-2}$ sont uniquement 2, 3 et 5.

Aucune attribution de ω ne peut être divisible par *p*. Le mot ω est un bloqueur de *p*.

Tous les nombres premiers autres que 2, 3 et 5 sont mauvais.

3.2. Dans la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre bon, il ne peut y avoir aucun nombre premier autre que 2, 3 ou 5. Sa décomposition est de la forme $2^x3^y5^z$ avec $x<5$; $y<3$; $z<3$ puisqu'on a vu que 32, 27 et 125 pour diverses raisons sont mauvais.

De plus, ce nombre est < 100. Les nombres susceptibles d'être bons sont :
1, 2, 4, 8, 16 ainsi que 3, 6, 12, 24, 48, ou 5, 10, 20, 40, 80 ou 9, 18, 36, 72 ou 15, 30, 60 ou 45, 90 ou 25, 50 ou 75. Ce qui fait 27 nombres.

4.1. En règle générale, un entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres autres que le chiffre 9.

La règle de remplacement suggérée ici revient à augmenter d'une unité tout chiffre *c* autre que 9 puis à prendre le nombre compris entre 0 et 8 auquel $c+1$ est congru modulo 9 (en effet 8 est remplacé par zéro qui est congru à $(8+1)$ modulo 9)

Si *k* est le nombre d'apparitions du 9 dans l'écriture de *a*, il y a $n-k$ autres chiffres dans cette écriture. La somme des chiffres est, modulo 9, augmentée de $n-k$ unités.

Ainsi : $a'\equiv r+(n-k)\quad (9)$

4.2. On va montrer que l'on peut obtenir une attribution qui est congrue à 0 modulo 9.

En pratiquant de 0 à 8 fois la permutation circulaire annoncée on obtient des attributions qui sont congrues successivement à $r+(n-k)$; ... ; $r+8(n-k)$.

Si l'entier k n'est pas congru à n modulo 3, l'entier $n-k$ est premier avec 9 et ses multiples $0\ ;\ (n-k)\ ;...;8(n-k)$ sont congrus (dans un certain ordre) une fois et une seule à chacun des entiers 0 ; 1 ; 2 ; … ; 8 modulo 9.

Dans ce cas, quel que soit l'entier r, un et un seul des entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ est congru à 0 modulo 9. Il existe par conséquent exactement une attribution qui est divisible par 9.

4.3. Si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9, les entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ sont congrus à l'un ou l'autre des entiers $r\ ;\ r+3\ ;\ r+6$ (on les obtient trois fois chacun).

Si r est congru à 0 modulo 3, alors l'un des trois entiers $r\ ;\ r+3\ ;r+6$ est congru à 0 modulo 9, et on obtient une attribution qui est divisible par 9 (et même on en obtient trois).

Si ce n'est pas le cas, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture de a n'est pas congru à n modulo 3 (sinon, r serait multiple de 3). Soit a_1 l'attribution de ω obtenue en permutant dans l'écriture ce chiffre avec le chiffre 9. Cette fois, dans cette nouvelle attribution, le nombre d'apparitions du chiffre 9 n'est plus congru à n modulo 3. On obtient une attribution qui ramène au cas étudié dans **4.2.**

4.4. Il reste à montrer que l'on peut obtenir une attribution de ω qui est divisible par 9 même si k est congru à n modulo 9.

Dans ce cas, tous les entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ sont congrus à r modulo 9. Si r est congru à 0 modulo 9, alors toutes les attributions obtenues sont divisibles par 9. Sinon, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture n'est pas congru à n modulo 9 (sinon r serait multiple de 9). On permute ce chiffre avec le 9 pour obtenir une nouvelle attribution qui ramène au cas **4.3** ou au cas **4.2**.

Dans tous les cas de figure, on peut construire une attribution de ω qui est divisible par 9, ce qui prouve qu'aucun mot n'est bloqueur de 9. Par conséquent, 9 est bon.

5. On peut essayer de compléter le raisonnement de la question 4 en montrant que pour tout mot ω, on peut construire une attribution de ω qui est non seulement divisible par 9 mais aussi paire.

Soit donc ω un mot et a une attribution de ω qui est divisible par 9 (la question précédente montre qu'il y en a au moins une). Soit n sa longueur, r la somme de ses chiffres et x_i le nombre d'apparitions du chiffre i ($i=0,1,...,9$) dans l'écriture de a. (Par conséquent : $r=\sum_{i=0}^{9} i\times x_i \equiv 0\ (9)$)

Si le dernier chiffre de a est pair, cette attribution est multiple de 18, la question est réglée.

Si ce n'est pas le cas, on remplace les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par respectivement les chiffres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cette permutation revient à remplacer le chiffre i par le chiffre $9-i$ et a pour effet de remplacer un chiffre pair par un impair et inversement. Cette nouvelle attribution a pour somme de chiffres :

$\sum_{i=0}^{9}(9-i)\times x_i =_{gj} \sum_{i=0}^{9} 9x_i - \sum_{i=0}^{9} i\times x_i = 9n-r$. Si r est divisible par 9, il en est de même de $9n-r$. On obtient une nouvelle attribution multiple de 9 et dont le dernier chiffre est pair, elle est multiple de 18.

Aucun mot ne bloque 18, 18 est bon.

6. Soit m un nombre « mauvais ». Il admet au moins un bloqueur ω dont toute attribution est un entier non divisible par m. Soit n la longueur de ω.

On peut s'intéresser aux mots obtenus en accolant les uns aux autres des « ω ».

Si on considère par exemple le mot $\omega\omega$, à toute attribution a de ω correspond une attribution $\overline{aa} = a \times (1 + 10^n)$ de ce mot. Dans le cas où m est premier avec $1 + 10^n$, l'entier m ne peut diviser $a \times (1 + 10^n)$, sinon d'après le théorème de Gauss, puisqu'il est premier avec $1 + 10^n$, il diviserait a, ce qui est exclu. Le mot $\omega\omega$ est dans ce cas lui aussi un bloqueur de m.

Si plus généralement on considère le mot $\omega\omega\ldots\omega$ où ω est répété k fois $(k > 1)$, à toute attribution a de ω correspond une attribution $\overline{aa....a} = a \times (1 + 10^n + \ldots + 10^{(k-1)n})$ de ce mot.

On reconnaît une expression de la forme : $\overline{aa....a} = a \times s_k$ vue dans le lemme évoqué dans le document « indications » avec $q = 10^n$.

En particulier, si on effectue j_k répétitions (avec les notations du lemme) : $\overline{aa....a} = a \times w_k$

L'entier m ne possède qu'un nombre fini de diviseurs. Il n'admet donc de diviseurs communs autres que 1 qu'avec un nombre fini d'entiers w_k et il est premier avec tous les autres. Pour tous ceux-là (il y en a une infinité), m ne peut diviser $a \times w_k$ sinon, d'après le théorème de Gauss il diviserait a ce qui est exclu. Les mots ainsi formés sont tous des bloqueurs de m.