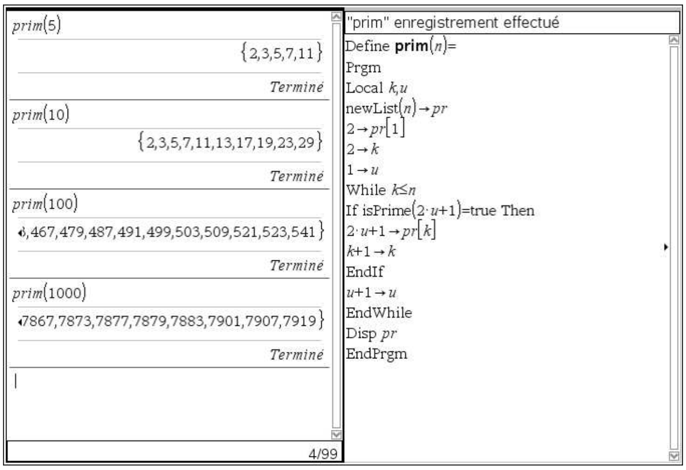
Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers avec TI nSpire. Application au problème 1 du concours général 2012

1. Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers

1.1. Création d'une liste de nombres premiers

Le programme **prim** fournit la liste nommée **pr** des *n* premiers nombres premiers. Le premier entier de la liste est 2, puis le programme teste uniquement les nombres impairs. Lorsqu'il rencontre un nombre premier, il l'ajoute à la liste et ceci jusqu'à ce que la liste *pr* soit composée de *n* nombres entiers.
Facultativement, le programme fait afficher la liste *pr*.
Par exemple, l'écran ci-contre affiche la liste des cinq premiers, puis des dix premiers nombres premiers. Le centième nombre premier est l'entier 541, le millième est l'entier 7919 et le cinq millième est l'entier 48611.



1.2. Matrice des facteurs premiers d'un nombre entier ≥ 2.

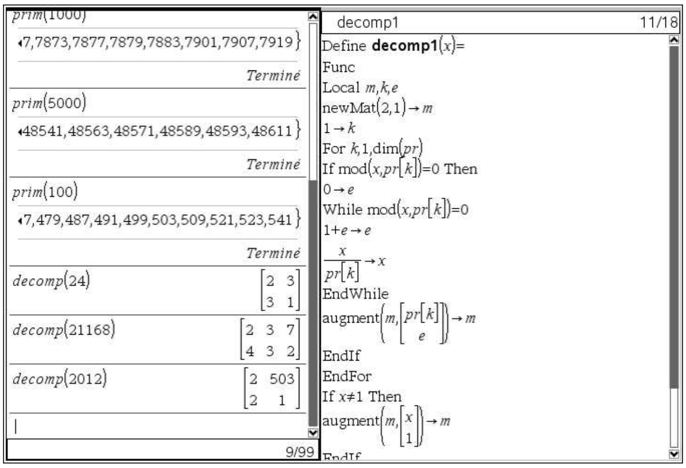
On se propose d'écrire une fonction nommée **decomp** qui donne, sous forme de matrice *m*, la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre entier *x* de petite taille. Les différents facteurs premiers seront inscrits sur la première ligne de la matrice, et leurs exposants sur la deuxième ligne.

Par exemple, pour l'entier $24 = 2^3.3$, la fonction doit renvoyer $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Pour l'entier $21168 = 2^4.3^3.7^2$, elle doit renvoyer $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et pour l'entier 2012, $\begin{bmatrix} 2 & 503 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

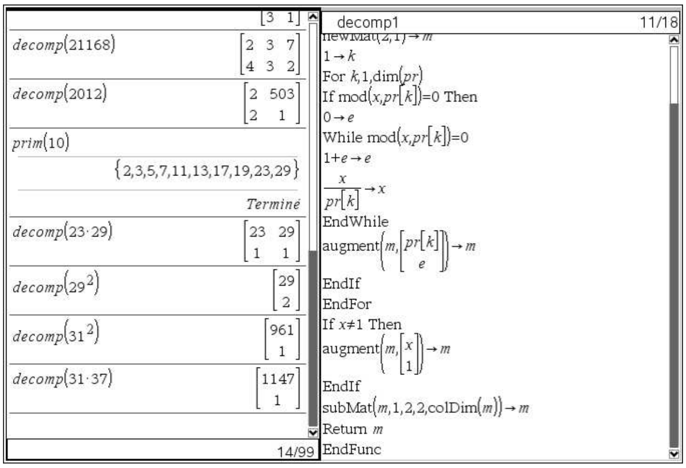
On suppose que le programme **prim** a été exécuté pour une certaine valeur de *n* (par exemple l'entier 100). La liste **pr** contient donc les *n* plus petits nombres premiers.

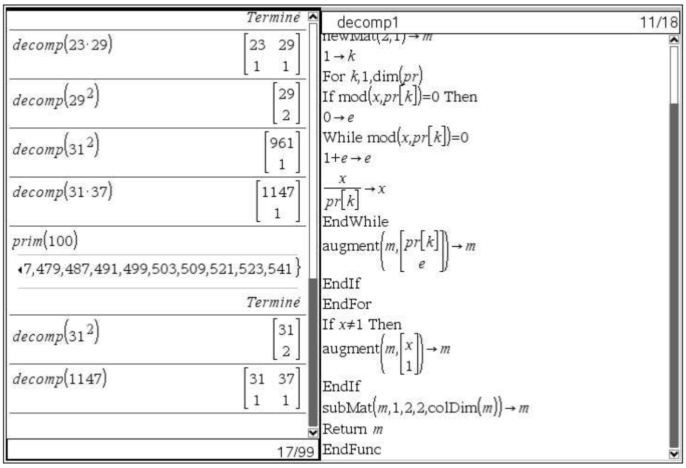
La fonction **decomp** va tester tour à tour si chacun des nombres premiers *p* de la liste **pr** figure dans la décomposition de *x*. Cette fonction donnera donc un résultat fiable à condition que *x* soit inférieur ou égal au carré du dernier élément de la liste **pr**. Avec la liste des dix plus petits nombres premiers, la fonction est utilisable pour tous les entiers jusqu'à $29^2 = 841$. Avec une liste des 5000 plus petits nombres premiers, elle est utilisable jusqu'à l'entier $48611^2 = 2\,363\,029\,321$ mais le temps de calcul est nettement plus long. Au-delà des limites de la liste **pr** utilisée, la matrice renvoyée par la fonction **decomp** peut contenir un « faux nombre premier ». Il faudra donc adapter la dimension de la liste **pr** à la taille des entiers que l'on projette de décomposer.

Pour chaque élément $pr[k]$ de la liste **pr**, la fonction teste si le reste de la division de x par $pr[k]$ est nul. Quand c'est le cas, elle divise x par $pr[k]$ et remplace x par $\dfrac{x}{pr[k]}$ autant de fois que c'est possible.
Le nombre de divisions effectuées est stocké dans la variable e.
La matrice m est augmentée de la colonne $\begin{bmatrix} pr[k] \\ e \end{bmatrix}$.



Si à la fin de la boucle $x=1$, c'est que la décomposition complète a été obtenue. Si $x \neq 1$ c'est que x n'est divisible par aucun élément de la liste **pr**, il est censé être premier. Il doit être incorporé à la matrice m avec l'exposant 1.
On efface avec **subMat** la première colonne de m (sinon elle commencerait par $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)
Sur la partie gauche de l'écran, on a exécuté le programme $prim(10)$. La fonction **decomp** décompose correctement 29×23 ou 29^2, mais elle échoue dans la décomposition de 31^2 ou de 31×37, qui sont au-delà du domaine de fiabilité garanti par $prim(10)$.





Avec une liste de nombres premiers plus longue (les douze plus petits nombres premiers auraient d'ailleurs suffi), les décompositions correctes de 961 et de 1147 sont obtenues.

2. L'énoncé du problème 1 du Concours Général 2012 : Les premiers sont en haut, les exposants sont en bas

Pour tout entier $n \geq 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ où les nombres premiers distincts p_1, p_2, …, p_k sont les diviseurs premiers de n et les exposants a_1, a_2, …, a_k sont des entiers strictement positifs. On pose alors $f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}$.

Par exemple, si $n = 720 = 2^4\, 3^2\, 5^1$, on a $f(n) = 4^2\, 2^3 1^5 = 128$. En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Enfin, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on définit $f^i(n)$ par récurrence sur i de façon que $f^0(n) = n$ et que pour tout i appartenant à $\mathbb{N}^*$: $f^{i+1}(n) = f\left(f^i(n)\right)$. Par exemple : $f^0(720) = 720$; $f^1(720) = 128$; $f^2(720) = f(128) = 49$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $\left(f^i(n)\right)_{i \in N}$ pour n fixé.

1.1. Calculer $f(2012)$.

1.2. Déterminer les nombres $f^i(36)$ pour $0 \leq i \leq 3$. Que peut-on dire des suivants ?

2.1. Donner un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que pour tout entier naturel i on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$ et $f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$

2.2. Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ les équations $f(n) = 1$; $f(n) = 2$; $f(n) = 4$.

4.1. Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$ montrer que $a\,b \leq a^b$

4.2. Soit k appartenant à $\mathbb{N}^*$, et a_1, a_2, …, a_k ; b_1, b_2, …, b_k des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i. Montrer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k \leq a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_k^{b_k}$

4.3. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, montrer que $f\left(f(n)\right) \leq n$

4.4. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que pour $i \geq r$, on ait : $f^{i+2}(n) = f^i(n)$

5. Soit E l'ensemble des entiers $n \geq 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

5.1. Pour tout entier $a \geq 2$, montrer qu'il existe des entiers naturels α et β tels que $a = 2\alpha + 3\beta$.

5.2. En déduire que si n appartient à E, alors il existe un élément m tel que $f(m) = n$

5.3. Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$

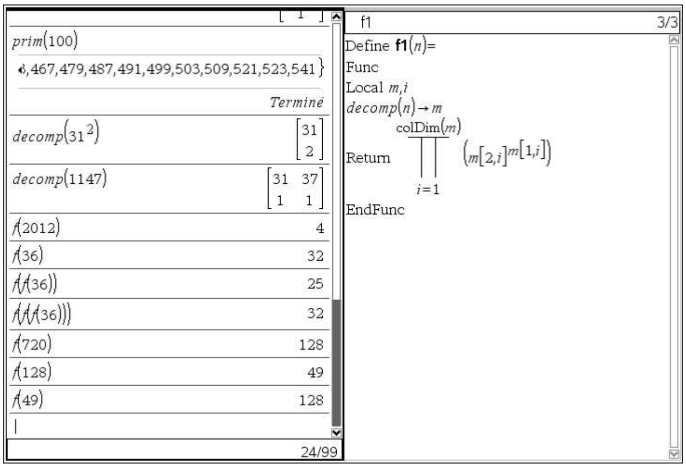
5.4. Que peut-on dire de la réciproque du **5.2** ?

3. Ecriture de la fonction *f* avec TI nSpire

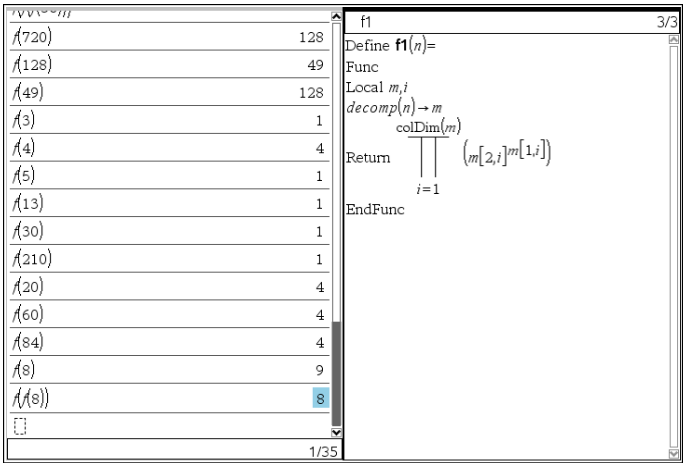
On suppose désormais que le programme **prim** a été exécuté avec une valeur de n suffisamment grande pour disposer d'une liste d'entiers premiers permettant le traitement garanti des nombres entiers disons jusqu'à 250000. (Pour cela, la liste des 100 plus petits entiers premiers convient).

La fonction **f** exécute **decomp** et stocke la matrice renvoyée dans la variable **m**. Puis elle renvoie le produit des exposants $m[2,i]$ élevés à la puissance $m[1,i]$.

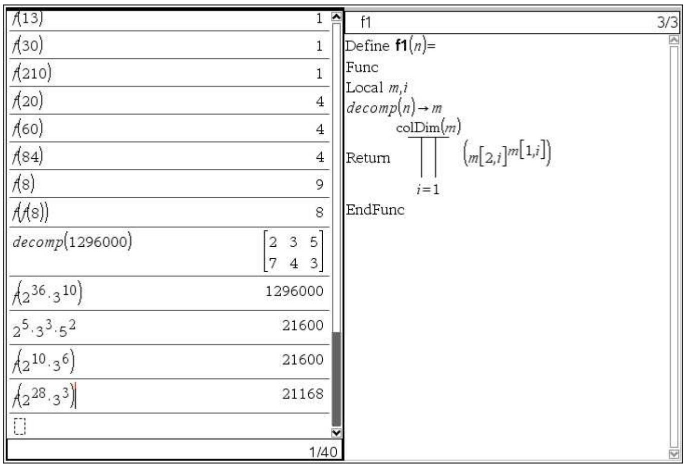
On obtient ainsi les images par f de certains entiers évoqués dans l'énoncé.

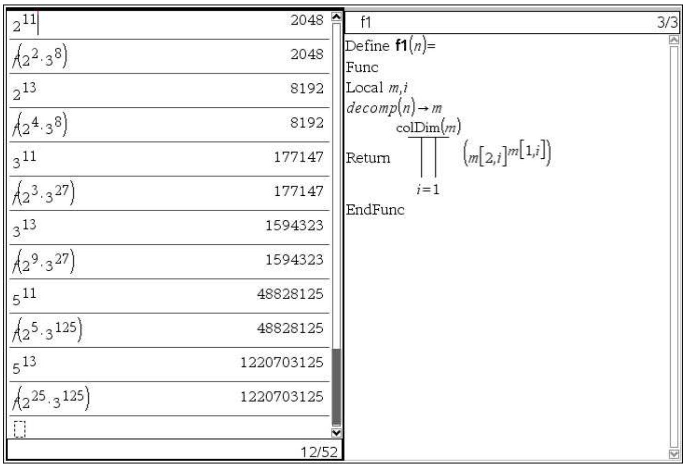


L'étude de l'image de quelques entiers permet de vérifier que f n'est ni croissante ni décroissante, de donner des exemples d'entiers conformes aux critères de la question **2.1** et d'émettre quelques conjectures à propos de la question **3**.

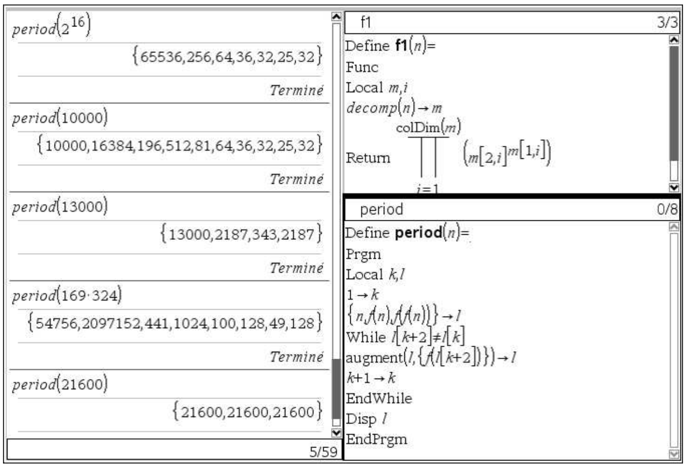


Les conjectures pour la question **5** sont plus obscures. Le cas 2012^{2012} étant hors de portée, voici des entiers dont les images sont, respectivement, 1296000, 21600 et 21168 …





… et ici des entiers dont les images sont des puissances de 2, de 3 ou de 5.



Un petit programme nommé **period** permet d'afficher les images successives d'un entier n jusqu'à trouver i tel que $f^{i+2}(n) = f^{i}(n)$ conformément à ce que dit la question **4.4**.

Comme on pouvait s'en douter, 21600 est un exemple d'entier invariant par f.