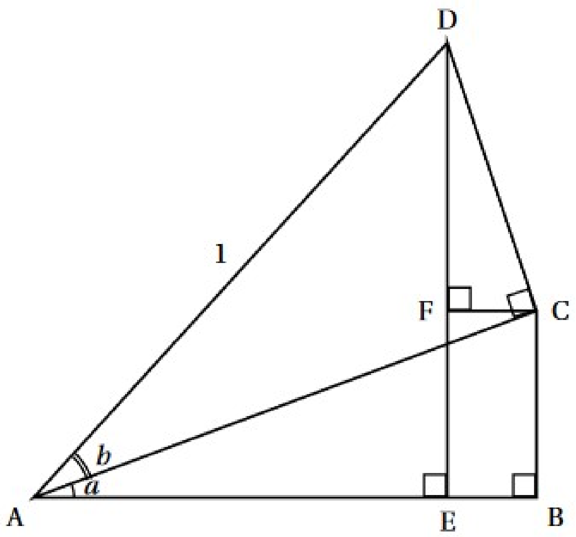
CAPES interne Mayotte 2021, problème 3 : Angles, relations métriques, aires

Problème qui visite quelques lieux communs classiques. L'énoncé présente quelques imperfections.

Le sujet

I - Formules d'addition

On considère la configuration du plan correspondant à la figure ci-dessous.



I. Justifier que les angles $\widehat{CDE}$ et $\widehat{BAC}$ ont même mesure.

II. En remarquant que $\sin(a+b) = EF + DF$, établir la relation $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

III. On admettra que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En déduire la relation :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

IV. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$, puis calculer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

II - Relations métriques

Soit un triangle ABC, de périmètre $2p$, où p est un nombre réel strictement positif donné.
I est le centre et r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle. P, Q et R sont les projetés orthogonaux de I respectivement sur les droites (BC),(AC) et (AB).On note $a = \widehat{BAI}$, $b = \widehat{CBI}$ et $c = \widehat{ACI}$

I. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale $p \times r$.

II. Démontrer que $p = r\left(\frac{1}{\tan a} + \frac{1}{\tan b} + \frac{1}{\tan c}\right)$.

III. On suppose le triangle ABC rectangle en A.

1. Exprimer $\tan c$ en fonction de $\tan b$.
2. En déduire que $r = p\frac{\tan b(1-\tan b)}{1+\tan c}$.

III - Variations du rayon et de l'aire du triangle rectangle

I. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]0\,;\,1[$ par

$$f(x) = p\frac{x(1-x)}{1+x},$$

où p est un nombre réel strictement positif.
Dresser le tableau de variation de f.

II. Soit g la fonction de la variable réelle b définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ par $g(b) = f(\tan b)$.
Étudier le sens de variation de la fonction g.

III. Pour quelle mesure b de l'angle, le rayon du cercle inscrit dans le triangle rectangle ABC, de périmètre $2p$ donné, est-il maximal ?

IV. Exprimer, en fonction de b, l'aire $S(b)$ du triangle ABC.

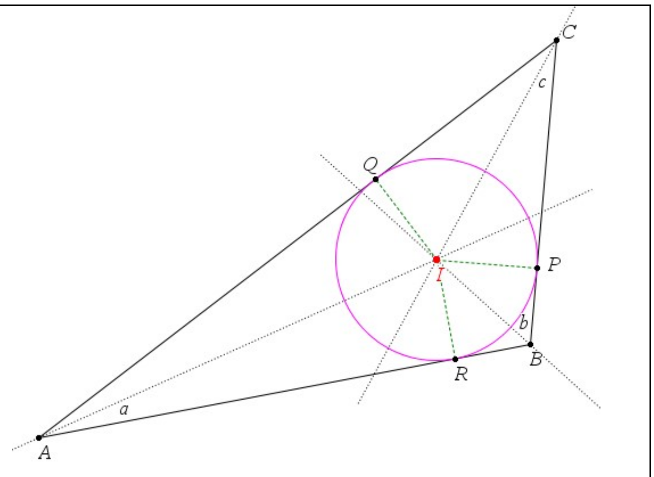
V. Pour quelle mesure b de l'angle, l'aire du triangle rectangle ABC, de périmètre $2p$ donné, est-elle maximale ?

Eléments de correction

I. Formules d'addition

On se réfère au cas de figure de l'énoncé, dans lequel $0 < a+b < \dfrac{\pi}{2}$, les formules démontrées sont valables dans ce contexte-là.

1. Les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires, de même que les droites (AC) et (CD) : les angles $\widehat{CDE}$ et $\widehat{BAC}$ ont leur côtés deux à deux perpendiculaires : ils sont ou bien égaux ou bien supplémentaires.



Ils sont tous deux des angles aigus : $\widehat{BAC}$ car c'est un angle à un sommet autre que celui de l'angle droit du triangle rectangle *BAC* et $\widehat{CDE}$ car, *D, F* et *E* étant alignés dans cet ordre, cet angle est égal à $\widehat{CDF}$ qui est un angle à un sommet autre que celui de l'angle droit du triangle rectangle *CDF* : Ils ne peuvent pas être supplémentaires, donc ils sont égaux.

2. $\sin(a+b) = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{DF+EF}{AD}$ (relation métrique dans le triangle rectangle *AED*)

Le quadrilatère *BEFC* a trois angles droits, c'est un rectangle. Donc : $EF = BC$

$$\sin(a+b) = \frac{DF+EF}{AD} = \frac{DF+BC}{AD}$$

Or : $\begin{cases} DF = DC\cos a \\ DC = AD\sin b \end{cases}$ (relations métriques dans les triangles rectangles *DCF* et *DCA*)

De même : $\begin{cases} BC = AC\sin a \\ AC = AD\cos b \end{cases}$ (relations métriques dans les triangles rectangles *ABC* et *DCA*)

On en déduit : $DF = AD.\cos a.\sin b$ et $BC = AD.\cos b.\sin a$ puis : $\sin(a+b) = \dfrac{DF+BC}{AD} = \dfrac{AD(\cos a.\sin b + \cos b.\sin a)}{AD}$ et par conséquent : $\sin(a+b) = \cos a.\sin b + \cos b.\sin a$

NB. On n'a pas besoin de la donnée $AD = 1$. La relation « $\sin(a+b) = DF + EF$ » de l'énoncé me paraît fâcheuse, disons au moins tendancieuse : un sinus serait-il égal à une longueur (peut-être qu'alors on peut le mesurer en centimètres, un scoop …) ?

3. $\cos(a+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\sin\left(-b+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right)=\cos(-b).\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin(-b)$

Ce qui donne la relation admise : $\cos(a+b)==\cos b.\cos a-\sin a.\sin b$

Ainsi : $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\cos a.\sin b+\cos b.\sin a}{\cos a.\cos b-\sin b.\sin a}=\dfrac{\dfrac{\cos a.\sin b+\cos b.\sin a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b-\sin b.\sin a}{\cos a.\cos b}}=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

4. $\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

La tangente du nombre $\frac{\pi}{8}$ est la solution située dans l'intervalle $]0\ ;1[$ de l'équation : $\dfrac{2t}{1-t^2}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$, équation qui est équivalente à : $t^2+2t-1=0$. Cette équation a pour solutions les nombres $-1\pm\sqrt{2}$. L'un est négatif. L'autre est : $\tan\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$

II. Relations métriques

1. Le centre du cercle inscrit étant strictement intérieur au triangle, les triangles *IAB*, *IBC* et *ICA* forment une partition du triangle *ABC*. L'aire de *ABC* est la somme des aires des trois triangles *IAB*, *IBC* et *ICA*.
Les hauteurs issues de *I* de ces triangles sont *IR*, *IP*, *IQ*, toutes égales au rayon *r* du cercle inscrit.

Les aires de ces triangles sont égales, respectivement, à : $\frac{1}{2}r\times AB\,;\frac{1}{2}r\times BC\,;\frac{1}{2}r\times CA$. La somme des trois aires est égale à : $\frac{1}{2}r\times AB+\frac{1}{2}r\times BC+\frac{1}{2}r\times CA=\frac{1}{2}r\times(AB+BC+CA)=r\ p$

On en déduit : $aire\ (ABC)=p\times r$

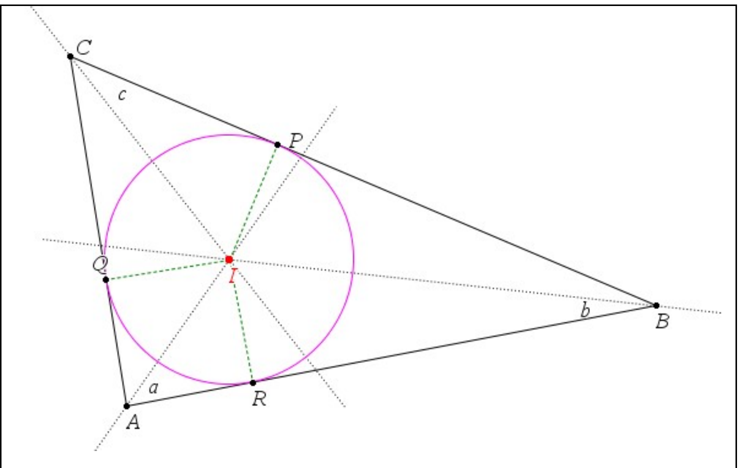
2. Le périmètre du triangle *ABC* s'exprime ainsi :
$2p=AR+RB+BP+PC+CQ+QA$.
Or : $AQ=AR$; $BR=BP$; $CP=CQ$ car *Q* et *R*, ainsi que *R* et *P* et que *P* et *Q* sont les points de contact des deux tangentes à un cercle issues d'un même point.
On en déduit : $2p=2AR+2BP+2CQ$ et donc : $p=AR+BP+CQ$.

Mais : $AR = \dfrac{IR}{\tan a}$; $BP = \dfrac{IP}{\tan b}$; $CQ = \dfrac{IQ}{\tan c}$ (relations métriques dans les triangles rectangles *AIR*, *BIP*, *CIQ*) et $IR = IP = IQ = r$

On obtient : $p = r\left(\dfrac{1}{\tan a} + \dfrac{1}{\tan b} + \dfrac{1}{\tan c}\right)$

3. Si *ABC* est rectangle en *A* :

D'une part $a = \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\tan a = 1$ puisque l'angle de sommet *A* est un angle droit et d'autre part : $b + c = \dfrac{\pi}{4}$ donc $\tan(b+c) = 1$ puisque les angles de sommets *B* et *C* sont complémentaires.



On en déduit : $\dfrac{\tan b + \tan c}{1 - \tan b.\tan c} = 1$, ce qui permet d'exprimer la tangente de *c* en fonction de celle de *b* :

$\tan c = \dfrac{1 - \tan b}{1 + \tan b}$

Dans ce cas de figure : $p = r\left(\dfrac{1}{\tan a} + \dfrac{1}{\tan b} + \dfrac{1}{\tan c}\right) = r\left(1 + \dfrac{1}{\tan b} + \dfrac{1 + \tan b}{1 - \tan b}\right)$

Soit : $p = r \times \dfrac{1 + \tan b}{\tan b(1 - \tan b)}$

III. Variations du rayon et de l'aire du triangle rectangle

1. Définissons sur l'intervalle fermé $[0\ ;\ 1]$ la fonction f_1 par : $f_1(x) = \dfrac{x(1-x)}{1+x}$. Il ne semble pas utile d'incorporer *p*, qui est une constante, dans l'expression de la fonction que l'on étudie. Il ne semble pas utile non plus d'ouvrir l'intervalle, alors qu'il n'y a aucun problème de définition aux bornes.

Cette fonction a pour dérivée la fonction : $f'_1(x) = \dfrac{1 - 2x - x^2}{(1+x)^2}$, qui est positive sur l'intervalle $\left[0\ ;\ -1+\sqrt{2}\right]$ et négative sur $\left[-1+\sqrt{2}\ ;1\right]$. (Le numérateur est une expression du second degré « déjà vue » dans ce problème).

La fonction f_1 admet un maximum lorsque $x = -1 + \sqrt{2}$ qui est égal à $3 - 2\sqrt{2}$

2. La fonction tangente est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle fermé $\left[0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$.

Elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle fermé $[0\ ;1]$.

Considérons que g est la composée de cette fonction tangente par la fonction f_1.

Le nombre : $\frac{\pi}{8}=\tan^{-1}\left(-1+\sqrt{2}\right)$, autrement dit le nombre b vérifiant : $\tan b=-1+\sqrt{2}$, joue un rôle dans la variation de g : cette fonction g est strictement croissante sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{8}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{8}\ ;\frac{\pi}{4}\right]$ et elle admet un maximum pour la valeur $\frac{\pi}{8}$

3. Le rayon r est maximal quand $b=\frac{\pi}{8}$ et il a dans ce cas pour valeur : $r=p\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left(3-2\sqrt{2}\right)p$

4. $S=p\times r=p^2\times\frac{1+\tan b}{\tan b\left(1-\tan b\right)}=p^2\times g\left(b\right)$. L'aire est maximale quand g est maximale, donc quand $b=\frac{\pi}{8}$ et elle a dans ce cas pour valeur : $\left(3-2\sqrt{2}\right)p^2$

Dans ce cas, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle (on pouvait s'en douter …)