CAPES Agricole 2019 : Objectif Lune

Le sujet est à se procurer en ligne. Quelques questions dont l'intérêt d'une correction est très relatif sont zappées.

Ce sujet est remarquable par sa partie A, intéressante, instructive et rappelant une découverte historiquement magistrale, coup de chapeau à l'auteur du sujet pour ce choix opportun. J'invite les candidats au CAPES à étudier au moins cette partie. Les parties sur la cosécante, sont plus « terre à terre » si j'ose m'exprimer ainsi en la circonstance.

Configurations du plan

Partie A : Distance Terre-Lune

Dans toute cette partie, l'unité de mesure des angles est le degré

2. Soit (x, y, z) la mesure d'un angle en degrés, minutes et secondes. La mesure de cet angle en degrés décimaux est $\theta(x,\ y,\ z) = x + \dfrac{y}{60} + \dfrac{z}{3600}$

La fonction **f** définie ci-contre effectue cette conversion.

Define $f(x,y,z)=x+\frac{y}{60}+\frac{z}{3600}$	*Terminé*
©gilbertjulia	
$f(34,21,25)$	34.35694
$f(52,31,12)$	52.52
$f(52,31,12)+f(34,21,25)$	86.87694
$\frac{31}{60}+\frac{12}{3600}$	$\frac{13}{25}$
$\frac{21}{60}+\frac{25}{3600}$	$\frac{257}{720}$

Si on note E le point de l'équateur situé sur le même méridien que Berlin et Le Cap, la mesure exacte en degrés décimaux de l'angle $\widehat{ETC}$ est 52,52 tandis qu'une valeur approchée de la mesure en degrés décimaux de l'angle $\widehat{ETB}$ est 34,357 à 10^{-3} près par excès.

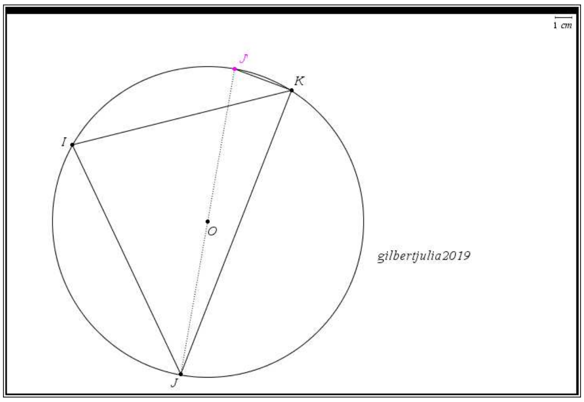
L'angle $\widehat{BTC}$ est la somme de ces deux angles, 86,877 est une valeur approchée de sa mesure à 10^{-3} près par excès.

3. $BC = 2 \times 6370 \times \sin\left(\dfrac{\widehat{BTC}}{2}\right)$. On trouve 8760 kilomètres au kilomètre près.

4.1. Soit J' le symétrique de J par rapport au point O. Le segment $[JJ']$ étant un diamètre du cercle circonscrit au triangle IJK, le triangle $JJ'K$ est un triangle rectangle en K.

Par conséquent : $KJ = JJ'\sin\left(\widehat{JJ'K}\right) = 2r\sin\left(\widehat{JJ'K}\right)$.

Or, les quatre points J, K, I, J' sont des points cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, les deux angles $\widehat{JJ'K}$ et $\widehat{JIK}$ sont ou bien des angles égaux …

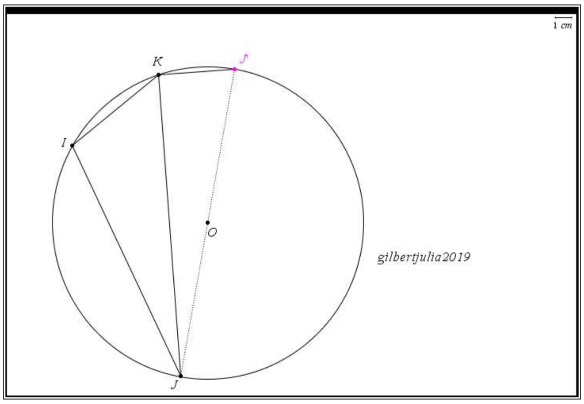


… ou bien des angles supplémentaires.

Ces deux angles ont, dans les deux cas, le même sinus.

On en déduit que : $KJ \underset{gj}{=} 2r\sin\left(\widehat{JIK}\right)$

C'est-à-dire que $\sin\left(\widehat{JIK}\right) = \dfrac{KJ}{2r}$.



4.2. Par permutation circulaire des lettres *I, J, K*, et sans nouvelle démonstration, deux relations analogues : $\sin\left(\widehat{KJI}\right) = \dfrac{IK}{2r}$ et $\sin\left(\widehat{IKJ}\right) = \dfrac{JI}{2r}$

NB. On note que les relations précédentes ne sont autres, écrites différemment, que la relation des sinus dans un triangle.

On connaît mieux cette « relation des sinus » dans un triangle noté ABC sous la forme « $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ »*, rapport accessoirement égal à deux fois le rayon du cercle circonscrit.*

Notons au passage, ce qui va servir bientôt, la relation de proportionnalité indépendante du rayon du cercle circonscrit que voici : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$

4.3. Intéressons nous à la **figure 1** de l'énoncé et reprenons ses notations.

Le triangle *BTC* étant isocèle de sommet *T*, l'angle $\hat{\alpha} = \widehat{TBC} = \widehat{TCB}$ est tel que : $2\hat{\alpha} + \widehat{BTC} = 180$. Cet angle est égal à : $\hat{\alpha} \underset{gj}{=} 90 - \dfrac{\widehat{BTC}}{2}$

Considérons dans cette figure 1 le triangle *BCL* et évaluons les divers angles de ce triangle :

- D'une part $\widehat{CBL} = 180 - \hat{b} - \hat{\alpha} = 90 - \hat{b} + \dfrac{\widehat{BTC}}{2}$.
- D'autre part : $\widehat{BCL} = 180 - \hat{c} - \hat{\alpha} = 90 - \hat{c} + \dfrac{\widehat{BTC}}{2}$.
- Enfin, $\widehat{BLC} = 180 - \widehat{BCL} - \widehat{CBL} = 180 - \left(90 - \hat{c} + \dfrac{\widehat{BTC}}{2}\right) - \left(90 - \hat{b} + \dfrac{\widehat{BTC}}{2}\right) = \hat{b} + \hat{c} - \widehat{BTC}$

Nous ne connaissons pas le rayon du cercle circonscrit.

Cependant, appliquant à ce triangle les formules obtenues à la question précédente, et en particulier la remarque « une relation indépendante du rayon du cercle circonscrit » :

$$\frac{BL}{BC}=\frac{\sin\left(\widehat{BCL}\right)}{\sin\left(\widehat{BLC}\right)}, \text{ c'est-à-dire que : } BL \underset{gilbertjulia}{=} BC\frac{\sin\left(\widehat{BCL}\right)}{\sin\left(\widehat{BLC}\right)}$$

Compte tenu des valeurs numériques calculées par les divers protagonistes de cette affaire :

$\hat{\alpha} \underset{gj}{=} 90-\dfrac{86{,}877}{2}=46{,}56$ (à 10^{-2} près) ;

$\widehat{CBL}=180-\hat{b}-\hat{\alpha}=79{,}92$ (à 10^{-2} près)

$\widehat{BCL}=180-\hat{c}-\hat{\alpha}=98{,}78$ (à 10^{-2} près) ;

$\widehat{BLC}==\hat{b}+\hat{c}-\widehat{BTC}=1{,}303$ (à 10^{-3} près)

On obtient : $BL=380700$ kilomètres

De même, on obtiendrait : $CL=379280$ kilomètres

Define t=86.876944444444	*Terminé*
Define $a=90-\frac{t}{2}$	*Terminé*
$90-\frac{t}{2}$	46.56153
180−53.52−46.561527777778	79.91847
180−34.66−46.561527777778	98.77847
53.52+34.66−t	1.303056
$\frac{8760\cdot\sin(98.778472222222)}{\sin(1.303055555556)}$	380700.8
$\frac{8760\cdot\sin(79.918472222222)}{\sin(1.303)}$	379281.6
©gilbertjulia	

Partie B : Définition de quelques fonctions trigonométriques

L'unité de mesure des angles est désormais le radian.

4. Soit le point M_x sur le cercle trigonométrique et T_x la tangente en ce point au cercle trigonométrique.

Cette droite T_x est la perpendiculaire en M_x à la radiale (OM_x). Elle est parallèle à Oy quand M_x appartient à Ox, c'est-à-dire quand $x \equiv 0 \ (\pi)$, et elle est parallèle à Ox quand M_x appartient à Oy, c'est-à-dire quand $x \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi)$.

5 à 8. Le point L_x existe si et seulement si T_x et Ox sont des droites sécantes, c'est-à-dire quand x n'est pas de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z}$.
Le point N_x existe si et seulement si T_x et Oy sont des droites sécantes, c'est-à-dire quand x n'est pas de la forme $x = k\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z}$.

L'ensemble **L** des réels x tels que L_x existe est l'ensemble : $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z}\right\}$

L'ensemble **N** des réels x tels que N_x existe est l'ensemble : $\mathbf{R} - \{k\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z}\}$

Pour obtenir les coordonnées de ces points, quand ils existent, la recherche d'une équation cartésienne de la tangente est utile.

L'auteur du sujet n'ayant pas libéré la notation x pour désigner l'abscisse d'un point de la tangente, il appartient au candidat de distinguer, d'une façon ou d'une autre, la notation de cette abscisse de celle d'une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. *Je prends l'option de changer provisoirement la notation de cet angle, sa mesure s'appellera u dans cette question.*

Soit donc le point M_u et T_u la tangente en ce point au cercle trigonométrique.

Un point $M(x, y)$ appartient à T_u si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{M_uM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_u}$, c'est-à-dire si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{OM_u} . \overrightarrow{M_uM}$ est nul.
Ce qui donne l'équation : $\cos u\,(x - \cos u) + \sin u\,(y - \sin u) = 0$.

Une équation cartésienne de T_u est de ce fait : $x\cos u + y\sin u - 1 = 0$

Il en résulte que lorsqu'ils existent le point L_u a pour coordonnées $L_u\left(\frac{1}{\cos u}, 0\right)$, autrement dit $L_u(\sec(u), 0)$, tandis que le point N_u a pour coordonnées $N_u\left(0, \frac{1}{\sin u}\right)$, autrement dit $N_u(0, \mathbf{cosec}(u))$

$L_uN_u^{\ 2} \underset{gilbertjulia}{=} \frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u . \sin^2 u}$ et par suite $L_uN_u \underset{gj}{=} \frac{1}{|\cos u . \sin u|}$, cela à condition que u ne soit pas congru à zéro modulo $\frac{\pi}{2}$.

Partie C : Quelques identités remarquables

L'hypothèse « x appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ » induit que les réels $\cos x$ et $\sin x$ sont tous deux strictement positifs, de même que les cosinus et sinus de leur moitié. On en tiendra compte lorsque nécessaire et on ne le redira plus.

1.1. Le triangle OM_0M_x étant isocèle de sommet O, soit I_x le milieu de $[M_0M_x]$ et pied de la hauteur issue de O de ce triangle.

$M_0M_x \underset{gj}{=} 2M_0I_x = 2OM_0 \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$.

1.2. L'angle de sommet M_0 de ce même triangle a pour mesure $\frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$.

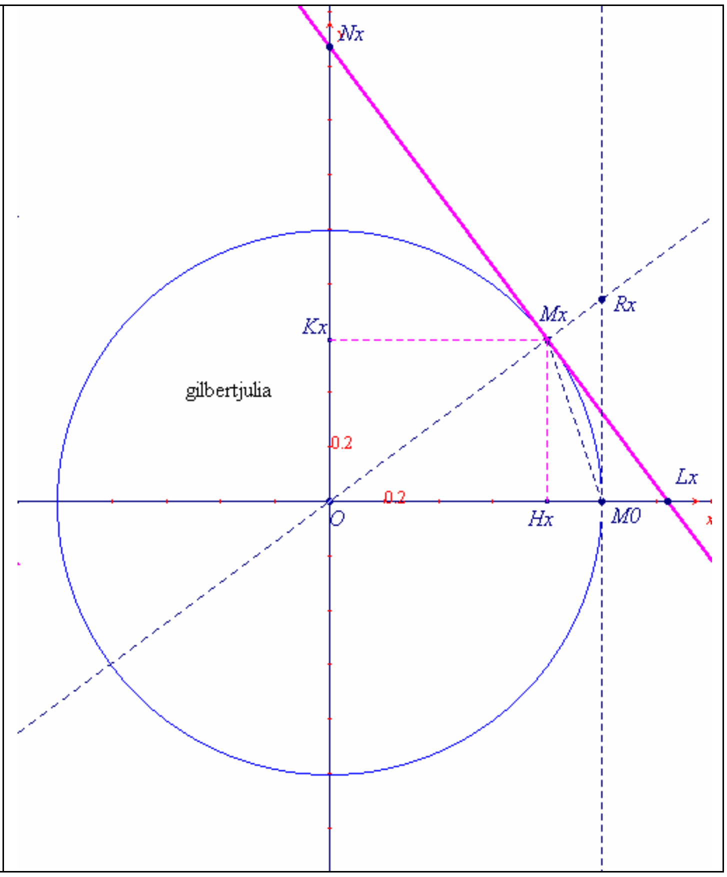
C'est aussi l'angle de sommet M_0 du triangle $M_0H_xM_x$ qui est un triangle rectangle en H_x.

L'angle de sommet M_x de ce triangle a ainsi pour mesure $\frac{x}{2}$.

1.3. $H_xM_x = \sin x$ d'une part.

$H_xM_x = M_0M_x . \cos\left(H_x\hat{M}_xM_0\right) \underset{gj}{=} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

d'autre part. Donc $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$



Parmi d'autres justifications possibles, en appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle OM_0M_x : $M_0M_x^2 \underset{gilbertjulia}{=} OM_0^2 + OM_x^2 - 2OM_0.OM_x.\cos\left(M_0\hat{O}M_x\right)$ donne la relation : $4\sin^2\frac{x}{2} = 2 - 2\cos x$ soit

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

2.2. Les deux triangles rectangles OM_xL_x et OM_0R_x ont un angle commun, leur angle de sommet O. Ils sont donc au moins semblables. De plus, leurs côtés respectifs adjacents à cet angle ont la même longueur : $OM_0 = OM_x = 1$. Ces deux triangles sont isométriques.

2.3. Ces deux triangles étant isométriques : $OL_x = OR_x$

- Le point L_x ayant pour abscisse $\frac{1}{\cos x}$, $OL_x^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$
- D'autre part, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OM_0R_x : $OR_x^2 = OM_0^2 + M_0R_x^2 = 1 + \tan^2 x$

D'où la relation trigonométrique : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Phénomènes continus

Partie A : deux exemples

1. L'équation différentielle (E) est une équation linéaire homogène du second ordre. L'ensemble de ses solutions constitue un espace vectoriel de dimension 2. Les fonctions proposées dans l'énoncé sont toutes les combinaisons linéaires de deux fonctions indépendantes et solutions de (E), elles constituent l'ensemble des solutions de (E).

1.2. Le nombre $A.\cos(\omega t)+B.\sin(\omega t)$ est la partie imaginaire du nombre complexe :

$(B+A\,i).(\cos(\omega t)+i.\sin(\omega t))=(B+A\,i).\exp(i\,\omega t)$ (Je persiste et signe, $B+A\,i$ et non $A+B\,i$)

Mettons sous forme trigonométrique le nombre $B+A\,i$: $B+A\,i=K.\exp(i\,\varphi)$ avec $K=|B+A\,i|=\sqrt{B^2+A^2}$ et φ défini par : $\cos\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{B^2+A^2}}$; $\sin\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{B^2+A^2}}$.

Alors : $(B+A\,i).(\cos(\omega t)+i.\sin(\omega t))=K.\exp(i(\omega t+\varphi))$.

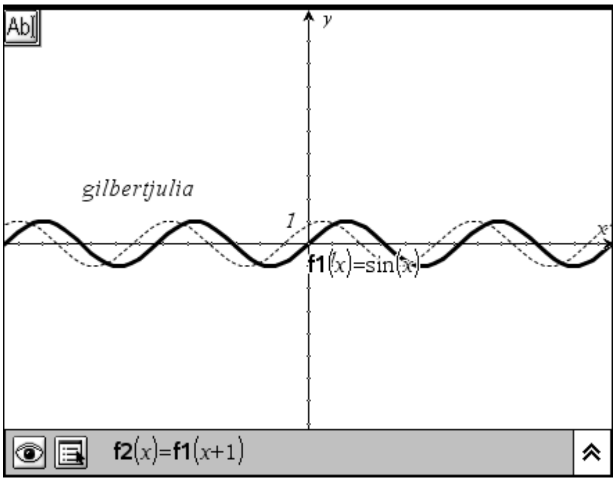
Il reste seulement à identifier les parties imaginaires de ce même nombre écrit d'une part sous la forme algébrique et d'autre part sous la forme trigonométrique.

1.3. On ne diminue pas la généralité en supposant dans cette question que $K=1$.

Prenons comme fonction de référence la fonction définie par $f(t)=\sin t$ et soit $C_{1,0}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en gras continu sur le graphique ci-contre).

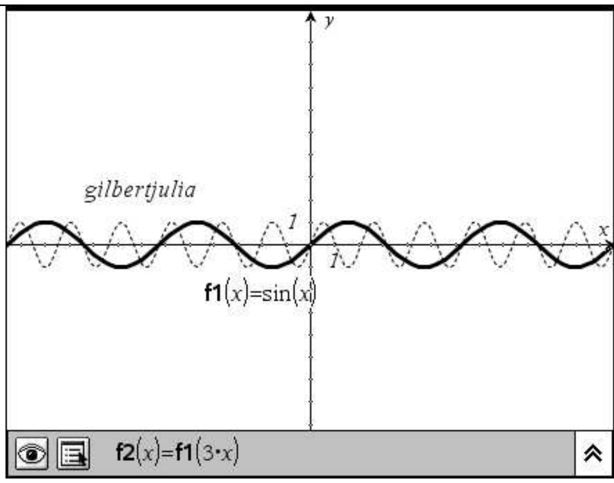
$C_{1,\varphi}$, en pointillés fins, représentative de la fonction : $f_{1,\varphi}(t)=\sin(t+\varphi)$ se déduit de $C_{1,0}$ par la translation de vecteur $-\varphi\vec{i}$.

En effet, le point $M(t,y)$ appartient à $C_{1,0}$ si et seulement si $y=\sin t$, c'est-à-dire si et seulement si $y=\sin((t-\varphi)+\varphi)$, ou encore si et seulement si le point $M'(t-\varphi,y)$ image de M par la susdite translation appartient à $C_{1,\varphi}$.



$C_{\omega,0}$ représentative de la fonction : $f_{\omega,0}(t)=\sin(\omega t)$ se déduit de $C_{1,0}$ par l'affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport $\dfrac{1}{\omega}$.

En effet, le point $M(t,y)$ appartient à $C_{1,0}$ si et seulement si $y=\sin t$, c'est-à-dire si et seulement si $y=\sin\left(\omega\left(\dfrac{t}{\omega}\right)\right)$, ou encore si et seulement si le point $M''\left(\dfrac{t}{\omega},y\right)$ image de M par la susdite affinité appartient à $C_{\omega,0}$.



Partie B : Etude de la fonction cosécante

1. Voir REDCM pages 136 et 137

3. Compte tenu de son imparité, de sa périodicité de période 2π et de ses variations sur l'intervalle $]0, \pi[$, l'équation $\mathbf{cosec}(x) = m$ n'admet aucune solution si m appartient à l'intervalle $]-1, +1[$ et sinon, une infinité de solutions.

Plus précisément, pour m supérieur ou égal à 1, $\mathbf{cosec}(x) = m \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{m}$

- $\mathbf{cosec}(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$ et donc $\mathbf{cosec}(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $\mathbf{cosec}(x) = -1 \Leftrightarrow \sin(x) = -1$ et donc $\mathbf{cosec}(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- Soit m tel que $-1 < m < 1$ et soit $\theta_m = \arcsin\left(\frac{1}{m}\right)$. Alors : $\mathbf{cosec}(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \arcsin\left(\frac{1}{m}\right)\ (2\pi) \\ \textit{ou bien} \\ x \equiv \pi - \arcsin\left(\frac{1}{m}\right)\ (2\pi) \end{cases}$

En particulier, $\theta_3 = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ est l'unique solution de l'équation $\mathbf{cosec}(x) = 3$ qui soit dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

NB. Une étude des variations de la fonction cosécante sur l'intervalle $]0, \pi[$ (où même seulement $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle d'étude auquel on peut se ramener si on veut) ne nécessite pas de calcul de dérivée. La fonction cosécante est l'inverse pour la multiplication de la fonction sinus. La fonction sinus étant strictement positive sur $]0, \pi[$, sa fonction inverse multiplicative varie en sens contraire d'elle.

Ainsi, la fonction sinus étant strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la cosécante est strictement décroissante sur cet intervalle. La fonction sinus étant strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, la cosécante est strictement croissante sur cet intervalle.

Partie C : Une primitive de la fonction cosécante

1. La fonction cosécante est une fonction continue sur l'intervalle $]0,\ \pi[$, elle est intégrable (i.e. elle admet des primitives) sur cet intervalle..

Si G est l'une de ses primitives, l'ensemble des primitives de la fonction cosécante est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto G(x)+C$ où C est une constante réelle et, parmi elles, la fonction $x \mapsto F(x)=G(x)-G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est l'unique primitive de la fonction cosécante qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. Cette fonction est donnée sous forme d'intégrale par la formule : $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{\sin t}\,dt$

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0,\ \pi[$, $F(\pi-x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-x}\frac{1}{\sin t}\,dt$ et avec le changement de variable $u=\pi-t$,

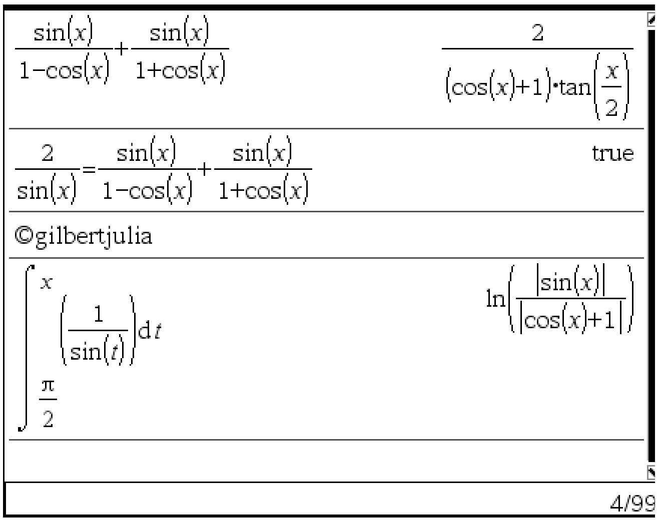
$$F(\pi-x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{\sin(\pi-u)}(-du)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{\sin(u)}du=-F(x).$$

Pour tout réel x de l'intervalle $]0,\ \pi[$, le réel $\pi-x$ appartient aussi à $]0,\ \pi[$ et $M(x,\ y)\in C_F \Leftrightarrow M'(\pi-x,\ -y)\in C_F$: la courbe représentative de F est globalement invariante par la symétrie centrale de centre le point I de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$. Ce point est un centre de symétrie de la courbe représentative de F.

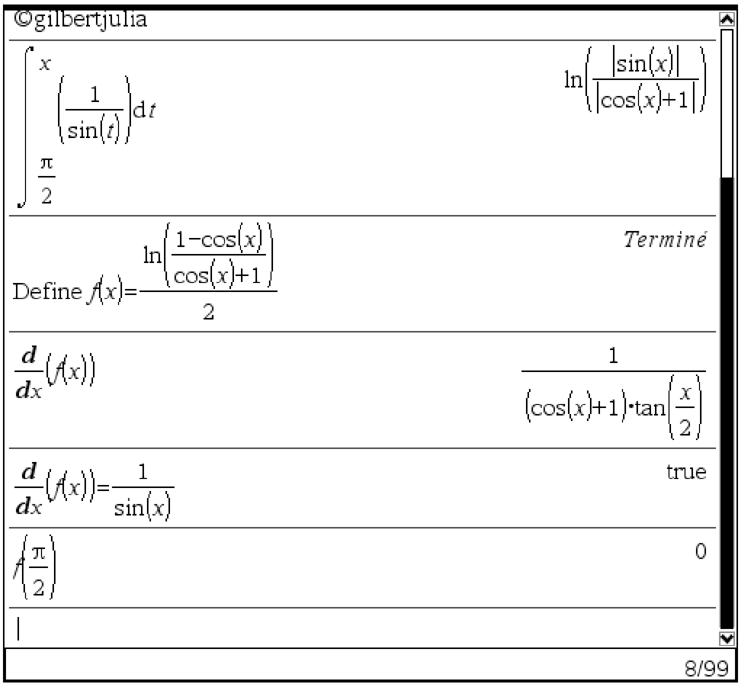
3. L'usage d'une calculatrice formelle ne donne pas toujours les résultats espérés, comme le montre la première ligne de l'écran ci-contre.

Cependant, si on lui demande s'il est exact que $\frac{2}{\sin x} \underset{gilbertjulia}{=} \frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}$, elle est plutôt d'accord.

4. De même, le résultat affiché par cette calculatrice pour désigner la fonction F est « déconcertant », ce n'est pas celui que nous attendions.



Pour notre part, nous aurions dit que $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$. Les fonctions $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ et $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ ayant sur $]0,\ \pi[$ pour primitive, respectivement, $\ln(1-\cos x)$ et $-\ln(1+\cos x)$ (car il s'agit dans les deux cas de fonctions de la forme « $\frac{u'}{u}$ », la seconde au signe près), une primitive de la fonction $\frac{1}{\sin x}$ sur $]0,\ \pi[$ est la fonction $x \mapsto F_1(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$. Il se trouve par-dessus le marché que cette fonction a l'excellente idée de s'annuler en $\frac{\pi}{2}$, il s'agit exactement de la fonction F.



C'est la *même fonction* que celle trouvée (peut-être par une autre méthode qui nous est inconnue) par la calculatrice.

Identité que la calculatrice finit par reconnaître, à notre grand soulagement …

Les deux réponses, la nôtre comme celle de la calculatrice, sont exactes.

5. Du fait que pour tout réel x de $]0,\pi[$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, on déduit que $F_1(\pi - x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) = -F_1(x)$, d'où l'existence du centre de symétrie *I*.

Une autre justification pourrait être de nature géométrique, par des considérations d'aire …

Partie D : Fonction réciproque

1. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle image $f(I)$. De ce fait, f admet une fonction réciproque définie sur $f(I)$ et prenant ses valeurs sur I.

La fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{2} \; si \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(x) = 1 - x \; si \; x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même. Pourtant, elle n'est ni continue ni strictement monotone sur $[0, 1]$. La condition énoncée précédemment est suffisante mais non nécessaire.

3. La fonction cosécante est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $[1, +\infty[$. Elle admet une fonction réciproque définie sur $[1, +\infty[$ et prenant ses valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

4. Soit f une fonction inversible et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit f^{-1} sa fonction réciproque, et $C_{f^{-1}}$ sa courbe représentative dans le même repère.

$M(x, y) \in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$

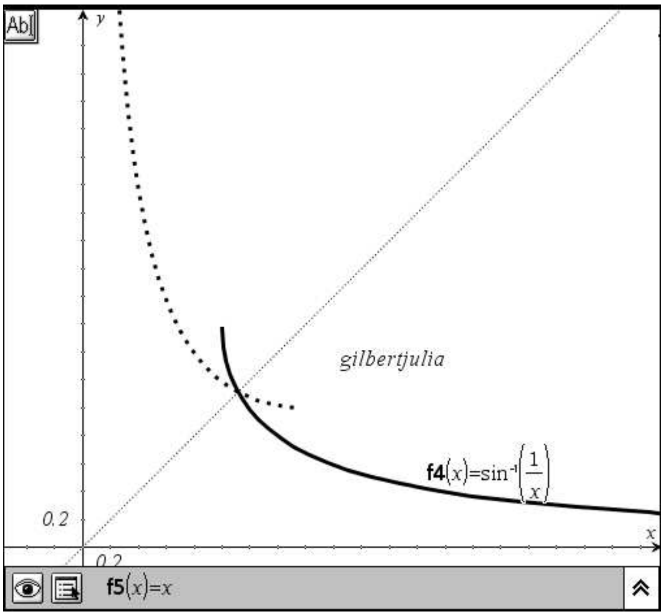
$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

$x = f(y) \Leftrightarrow M'(y, x) \in C_f$.

Ainsi $M(x, y) \in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow M'(y, x) \in C_f(x)$

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de sa réciproque sont images l'une de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.

Ci-contre, voici ce que cela donne dans le présent contexte.



5. Pour tout réel y appartenant à $[1, +\infty[$, son inverse multiplicatif $\frac{1}{y}$ appartient à $]0, 1]$ et l'unique réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\frac{1}{\sin x} = y$, c'est-à-dire tel que $\sin x = \frac{1}{y}$, est, par définition, l'arcsinus de ce nombre. $g(y) = \arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$. (L'arcsinus d'un réel situé dans $]0, 1]$ est en effet situé dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

6. Supposons f inversible et dérivable sur I. En tout point y de $f(I)$ tel que la fonction dérivée de f ne s'annule pas en $x = f^{-1}(y)$, la fonction f^{-1} est dérivable et : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

En l'occurrence, la fonction cosécante a pour dérivée la fonction : $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2} = \arcsin(1)$.

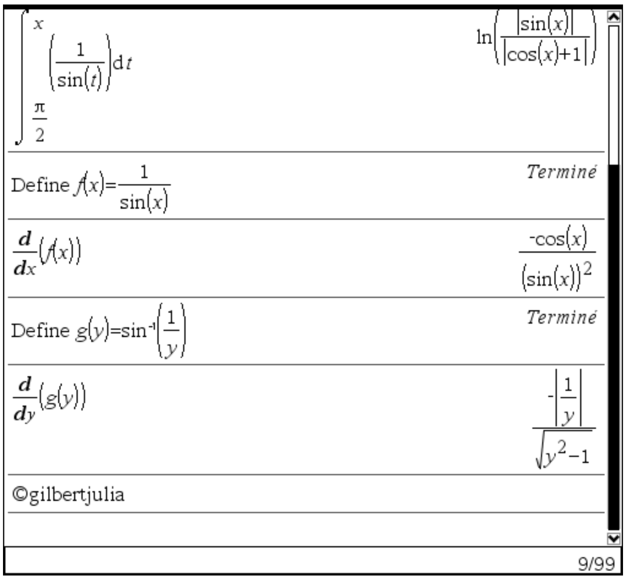
Nous n'étions pas obligés de calculer cette dérivée pour l'étude des variations, mais nous y voici contraints maintenant …

La fonction g réciproque de la cosécante est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$ (elle ne l'est pas en 1) et sa dérivée est :

$$g'(y) \underset{gjulia}{=} -\frac{\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}} = -\frac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$$

Soit :

$$g'(y) \underset{gjulia}{=} -\frac{\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$



Cette fois, la calculatrice formelle rend un verdict concordant.

Elle utilise prudemment des valeurs absolues car nous ne l'avons pas informée que l'on cherchait une fonction réciproque sur $[1, +\infty[$ *, on aurait aussi bien pu en chercher une sur* $]-\infty, -1]$.