CAPES 1992 épreuve 2, à propos du réseau Z^2 Problème 3

Dans ce sujet, le plan affine euclidien orienté et rapporté à un repère **R**.

Le réseau de « points à coordonnées entières » ou de façon abrégée de « points entiers » est défini dans ce problème comme étant l'ensemble **Z×Z** *des points du plan dont les coordonnées dans le repère* **R** *sont deux entiers relatifs.*

Le thème abordé est le suivant :

- *Existe-t-il des carrés à l'intérieur desquels se trouvent un nombre déterminé n de points entiers ?*

1. Le sujet

Partie A : Un nouveau repère du plan

Soit D_1 la droite d'équation $x+y\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}=0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3}-y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0$

1. Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires, préciser les coordonnées de leur point d'intersection Ω et représenter graphiquement ces droites.

2. On pose : $\begin{cases} X=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3}-y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ Y=\dfrac{1}{2}\left(x+y\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$. Montrer qu'on définit ainsi un changement de repère orthonormé direct dans lequel les nouveaux axes sont portés respectivement par D_1 et D_2.

Partie B : Une nouvelle distance sur le plan

1. Montrer que l'application : qui à chaque couple de points du plan (M, N) associe le nombre $d(M,N)=|X_N-X_m|+|Y_N-Y_M|$ (où (X_M, Y_M) et (X_N, X_N) sont les coordonnées respectives dans le nouveau repère de ces points) est une distance.

2. Montrer que quels que soient les points M et N du plan : $MN \le d(M, N) \le \sqrt{2}\,MN$

3. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'ensemble des points M du plan tels que $d(\Omega, M)=1$. Représenter graphiquement cet ensemble.

Partie C : Une fonction sur le réseau et ce qu'il s'ensuit

On définit sur l'ensemble des points du réseau $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ la fonction suivante :

Pour tout point M du réseau $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, on note $(x,\ y)$ ses coordonnées dans le repère initial R (x et y sont donc deux entiers relatifs) et $(X,\ Y)$ ses coordonnées dans le nouveau repère ci-dessus.

On pose : $f(M)=d(\Omega,M)=|X|+|Y|=\frac{1}{2}\left(\left|x\sqrt{3}-y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|+\left|x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|\right)$

1. Injectivité de la fonction f

On considère deux points M_1 et M_2 du réseau de coordonnées respectives $(x_1,\ y_1)$ et $(x_2,\ y_2)$ dans le repère initial R et tels que $f(M_1)=f(M_2)$

1.1. Montrer qu'il existe quatre nombres réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ vérifiant : $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=\delta^2=1$ et tels que :

$$\begin{cases}\alpha\, x_1+\beta\, y_1-\gamma\, x_2-\delta\, y_2+\dfrac{\gamma-\alpha}{3}=0\\ \beta\, x_1-\alpha\, y_1-\delta\, x_2+\gamma\, y_2+\dfrac{\delta-\beta}{3}=0\end{cases}$$

. (*On pourra observer que pour tout réel x : $|x|=\lambda\, x$ avec $\lambda^2=1$*)

1.2. Montrer que $\gamma-\alpha=\delta-\beta=0$.

1.3. En déduire que $M_1=M_2$

2. Une classification des points du réseau

Montrer que l'on peut classer les points du réseau en une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que pour tout entier n strictement positif : $f(M_n)<f(M_{n+1})$

3. Carré dont l'intérieur contient un nombre déterminé de points

3.1. Soit un réel a strictement positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(X,\ Y)$ dans le nouveau repère vérifient $|X|+|Y|<a$ est l'intérieur d'un carré C_a dont on précisera les sommets.

3.2. En déduire que pour tout entier n strictement positif il existe un carré C_a dont l'intérieur contient exactement n points.

2. Eléments de correction

Partie A : Un nouveau repère

Quelques rappels

Soit $R : \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ le repère initial et $\left(\Omega, \vec{u}, \vec{v}\right)$ le nouveau repère avec $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ coordonnées dans R ainsi que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$; $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ expression des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne

Pour un même point M : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) + Y\left(c\vec{i} + d\vec{j}\right)$

La relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ s'écrit, en se référant à la base initiale :

$x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x_0\vec{i} + y_0\vec{j}\right) + \left(X\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) + Y\left(c\vec{i} + d\vec{j}\right)\right) = \left(x_0 + aX + cY\right)\vec{i} + \left(y_0 + bX + dY\right)\vec{j}$

Par identification : $\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$ ou matriciellement : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, expressions des coordonnées initiales en fonction des nouvelles coordonnées, la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ étant la matrice de passage d'une base à l'autre.

Fin des rappels

1. Clairement, les droites D₁ et D₂ passent toutes deux par le point $\Omega\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Elles ont pour vecteurs directeurs, respectivement, $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ qui sont des vecteurs orthogonaux (vu ce qui suit, j'ai choisi d'emblée des vecteurs unitaires, pour l'instant ce n'était pas nécessaire). Ces deux droites sont perpendiculaires.

2. Si on inverse les relations : $\begin{cases} X = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ Y = \frac{1}{2}\left(x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$, on obtient : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(X\sqrt{3} + Y + \frac{1}{3}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(-X + Y\sqrt{3}\right) \end{cases}$ c'est-à-dire matriciellement : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. On reconnaît des formules de changement de repère où la nouvelle origine est le point Ω et les vecteurs de la nouvelle base sont $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ vecteurs directeurs respectifs de D₁ et D₂. Les nouveaux axes sont supportés par D₁ et D₂.

On note que la matrice de passage est la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ de la rotation vectorielle d'angle $-\frac{5\pi}{6}$, le nouveau repère est orthonormé direct puisque la nouvelle base est image de la base initiale par une rotation.

Partie B : Une nouvelle distance

1. L'application qui à chaque couple de points du plan (M, N) associe le nombre $d(M,N)=|X_N - X_m|+|Y_N - Y_M|$ vérifie :

- $d(M,N)\geq 0 \ \forall (M,N)$ et $d(M,N)=0 \Leftrightarrow M=N$
- $d(M,N)=d(N,M) \ \forall (M,N)$
- L'inégalité triangulaire : $d(M_1,M_2)+d(M_2,M_3)\geq d(M_1,M_3)$ est conséquence directe de l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues.

C'est donc une distance.

2. On pose dans cette question pour alléger les écritures : $X = X_N - X_M$ et $Y = Y_N - Y_M$ où M et N sont deux points quelconques du plan.

Le nouveau repère étant orthonormé, la distance MN au sens usuel du terme se calcule par : $MN = \sqrt{X^2+Y^2}$. Ainsi : $MN^2 = X^2+Y^2$.

D'autre part : $(d(M, N))^2 - MN^2 = (|X|+|Y|)^2 - (X^2+Y^2) = 2|X||Y| \geq 0$, ce qui justifie que $d(M, N)\geq MN$

$(d(M, N))^2 - 2MN^2 = (|X|+|Y|)^2 - 2(X^2+Y^2) = -X^2 - Y^2 + 2|X||Y| = -(|X|-|Y|)^2 \leq 0$, ce qui justifie que $d(M, N)\leq \sqrt{2}\,MN$

3. $d(\Omega, M)=1 \Leftrightarrow |X|+|Y|=1$.

L'ensemble des points vérifiant cette relation est globalement invariant par chacune des applications : $M(X, Y)\mapsto M'(-X, Y)$ (réflexion d'axe D_2) ; $M(X, Y)\mapsto M'(X, -Y)$ (réflexion d'axe D_1) ; $M(X, Y)\mapsto M'(-X, -Y)$ (symétrie centrale de centre Ω).

Cet ensemble possède un centre de symétrie et au moins deux axes de symétrie (il en possède d'ailleurs deux autres, il est globalement invariant par $M(X, Y)\mapsto M'(Y, X)$ (réflexion par rapport à la droite d'équation $Y = X$).

Il suffit de chercher son intersection avec le quart de plan $(X\geq 0 \ ; \ Y\geq 0)$.

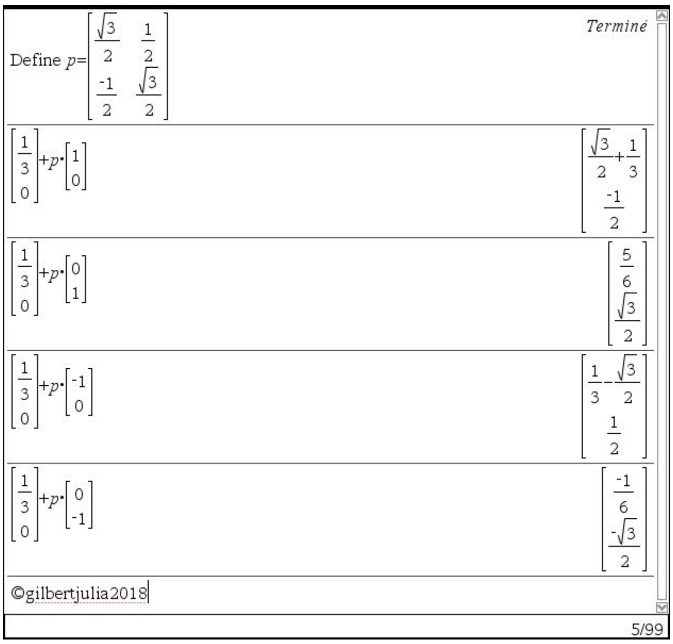
Pour tout point M appartenant à ce quart de plan : $d(\Omega, M)=1 \Leftrightarrow X+Y=1$.

Cette intersection est le segment dont les extrémités sont les points $A_1(1, 0)$ et $B_1(0,1)$ (coordonnées dans le nouveau repère).

L'ensemble cherché s'obtient en entier en construisant les images de ce segment par les trois applications mentionnées ci-dessus.

Il s'agit d'un carré dont les sommets sont les quatre points $A_1(1, 0)$; $B_1(0,1)$; $C_1(-1, 0)$ et $D_1(0, -1)$

Ci-contre, les coordonnées de ces sommets dans le repère R



Partie C : Une fonction sur le réseau et ce qu'il s'ensuit

1.1. Pour tous points M_1 et M_2 dont les coordonnées dans le repère R sont des entiers relatifs :

$$f(M_1)=f(M_2)\Leftrightarrow\left|x_1\sqrt{3}-y_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|+\left|x_1+y_1\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|=\left|x_2\sqrt{3}-y_2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|+\left|x_2+y_2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|.$$

Selon l'indication, il existe quatre nombres réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ égaux soit à +1 soit à – 1 selon les signes des expressions sans valeur absolue tels que :

$$\left|x_1\sqrt{3}-y_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|=\alpha\left(x_1\sqrt{3}-y_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ;\ \left|x_1+y_1\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|=\beta\left(x_1+y_1\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\left|x_2\sqrt{3}-y_2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|=\gamma\left(x_2\sqrt{3}-y_2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ;\ \left|x_2+y_2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|=\delta\left(x_2+y_2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$f(M_1)=f(M_2)\Leftrightarrow\alpha\left(x_1\sqrt{3}-y_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\beta\left(x_1+y_1\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)=\gamma\left(x_2\sqrt{3}-y_2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\delta\left(x_2+y_2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right).$$

En réorganisant :

$$f(M_1)=f(M_2)\Leftrightarrow\left(-\alpha\,y_1+\beta\,x_1-\frac{\beta}{3}+\gamma\,y_2-\delta\,x_2+\frac{\delta}{3}\right)+\sqrt{3}\left(\alpha\,x_1-\frac{\alpha}{3}+\beta\,y_1-\gamma\,x_2+\frac{\gamma}{3}+\delta\,y_2\right)=0$$

1.2. En raison de l'irrationnalité du nombre $\sqrt{3}$, les nombres entre parenthèses étant tous des rationnels, cette relation ne peut être vérifiée que si chacune des deux parenthèses est nulle, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases}-\alpha\,y_1+\beta\,x_1-\dfrac{\beta}{3}+\gamma\,y_2-\delta\,x_2+\dfrac{\delta}{3}=0\\[2mm] \alpha\,x_1-\dfrac{\alpha}{3}+\beta\,y_1-\gamma\,x_2+\dfrac{\gamma}{3}+\delta\,y_2=0\end{cases}$$

.On peut écrire :

$$\begin{cases}-\alpha\,y_1+\beta\,x_1+\gamma\,y_2-\delta\,x_2=\dfrac{\beta-\delta}{3}\\[2mm] \alpha\,x_1+\beta\,y_1-\gamma\,x_2+\delta\,y_2=\dfrac{\alpha-\gamma}{3}\end{cases}$$

Les deux premiers membres sont des nombres entiers, donc les deux seconds membres sont aussi des entiers. $\beta-\delta$ et $\alpha-\gamma$ sont des multiples de 3, mais $\beta-\delta$ et $\alpha-\gamma$ prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{-2\ ;\ 0\ ;\ 2\}$, le seul multiple de 3 disponible est zéro. Donc : $\beta-\delta=\alpha-\gamma=0$.

1.3. On obtient désormais :

$$\begin{cases}-\alpha\,y_1+\beta\,x_1-\dfrac{\beta}{3}+\alpha\,y_2-\beta\,x_2+\dfrac{\beta}{3}=0\\[2mm] \alpha\,x_1-\dfrac{\alpha}{3}+\beta\,y_1-\alpha\,x_2+\dfrac{\alpha}{3}+\beta\,y_2=0\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases}\beta(x_1-x_2)+\alpha(y_2-y_1)=0\\ \alpha(x_1-x_2)+\beta(y_1-y_2)=0\end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de deux équations d'inconnues (x_1-x_2) ; (y_2-y_1) et de déterminant non nul (c'est $\alpha^2+\beta^2=2$) . On conclut que nécessairement : $(x_1-x_2)=(y_2-y_1)=0$: c'est-à-dire que $M_1=M_2$.

L'application *f* est injective.

2. On peut numéroter ainsi :

On initialise la numérotation en attribuant le numéro 1 à l'origine O du repère R qui est, selon la distance d, le point du réseau le plus proche de Ω : $M_1 = O$

M_2 est le point de coordonnées $(1,\ 0)$ dans R, qui est, après le point O, le deuxième point du réseau le plus proche de Ω.. Il vérifie : $f(M_1) < f(M_2)$ et $f(M_2) < f(M)$ pour tout autre point du réseau.

Supposons numérotés n points ($n \geq 1$) du réseau : $f(M_1) < f(M_2) < \ldots < f(M_n)$ et $f(AM_n) < f(AM)$pour tout autre point M du réseau.

Soit S un point du réseau non numéroté (donc $AM_n < AS$).
On considère l'ensemble non vide (il contient S) et borné[1] : $\{M \in (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}),\ f(M_n) < f(M) \leq f(S)\}$ des points du réseau dont la distance (selon d) est inférieure ou égale à $f(S)$, à l'exception des n points déjà numérotés. Il contient un nombre fini d'éléments.

L'ensemble $\{f(M)\ ;\ )M \in (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}),\ f(M) \leq f(S)\} - \{M_1, \ldots, M_n\}$ est une partie finie de $\mathbf{R}^+$. Il admet un plus petit élément, correspondant à un unique point du réseau auquel on attribue le numéro $n+1$. Alors $f(M_1) < f(M_2) < \ldots < f(M_n) < f(M_{n+1})$ et $f(M_{n+1}) < f(M)$pour tout autre point M du réseau.

Ceci construit par récurrence un classement des points du réseau par distances selon d au point Ω croissantes. (De la même manière qu'au problème 2, on pourrait aisément vérifier que cette méthode de numérotation n'oublie aucun point).

3.1. Si on reprend la question **B3** , on peut noter que l'intersection du quart de plan $X \geq 0,\ Y \geq 0$ avec l'ensemble des points $M(X,\ Y)$ vérifiant $d(\Omega,\ M) < 1$ est délimité par les inégalités suivantes : $\begin{cases} X \geq 0 \\ Y \geq 0 \\ X + Y < 1 \end{cases}$. Il s'agit du triangle rectangle isocèle ΩAB privé de l'hypoténuse [AB]. L'ensemble cherché s'obtient en entier en lui réunissant les images de ce triangle par les trois applications de **B3**. On obtient l'intérieur C_1 du carré $ABCD$.

Pour a strictement positif, C_a est le carré image de C_1 par l'homothétie de centre Ω et de rapport a.

En effet, si $M \xrightarrow{h} M'$ est cette homothétie, vu que le centre est l'origine du nouveau repère, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{\Omega M'} = a\, \overrightarrow{\Omega M}$ et : $\begin{cases} X_{M'} = a\, X_M \\ Y_{M'} = a\, Y_M \end{cases}$; par suite : $|X_{M'}| + |Y_{M'}| = a\left(|X_M| + |Y_M|\right)$ c'est-à-dire $d(\Omega,\ M') = a\, d(\Omega, M)$, une homothétie de centre Ω conserve la distance d (ce ne serait pas du tout le cas pour une homothétie de centre quelconque). Ainsi : $d(\Omega,\ M') < a \Leftrightarrow d(\Omega, M) < 1$

3.2 Si on considère un réel a tel que $f(M_n) < a < f(M_{n+1})$, le carré C_a contient strictement les n points $M_1, \ldots, M_n$ mais aucun autre point du réseau. Il contient exactement n points du réseau.

[1] On remarque qu'en raison de la double inégalité $MN \leq d(M,\ N) \leq \sqrt{2}\, MN$, un ensemble est « borné » au sens de la distance d si et seulement si il est « borné » au sens de la distance usuelle.

En bleu les nouveaux axes, en rouge le « cercle unité », si l'on peut s'exprimer ainsi, suivant la nouvelle distance d c'est-à-dire l'ensemble des points du plan tels que $d(\Omega, M)=1$.

En magenta pointillé un exemple de carré qui contient exactement 9 points du réseau.

On trouverait d'autres exemples de carrés ayant la même propriété par translations de vecteurs à coordonnées entières.