CAPES 1992 épreuve 2 à propos du réseau $\mathbf{Z}^2$ Problème 2

Dans ce sujet, le plan affine euclidien orienté et rapporté à un repère orthonormé est assimilé au plan complexe. On considère le réseau de « points à coordonnées entières » ou de façon abrégée de « points entiers », ensemble des points du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs. Il est aussi défini dans ce sujet comme étant l'ensemble $\mathbf{Z}[i]=\{a+b\,i\ ;\ (a,\ b)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$ *des complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs.*

Les thèmes abordés ici :

- *Existe-t-il des disques à l'intérieur desquels se trouvent un nombre déterminé n de points entiers ?*
- *Existe-t-il des cercles passant par un nombre déterminé n de points entiers ?*

1. Le sujet

Partie A : Disques à l'intérieur desquels se trouvent *n* points du réseau

1. Soit $\mathcal{B}$ une partie bornée du plan. Montrer que $\mathcal{B}$ ne contient qu'un nombre fini de points du réseau.

2. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$. Montrer qu'il n'existe pas deux points du réseau à la même distance du point A. En déduire que l'on peut classer les points du réseau en une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $AM_n < AM_{n+1}$ pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$.

3. Etant donné un entier n strictement positif, montrer qu'il existe des disques de centre A à l'intérieur desquels se trouvent exactement n points du réseau.

Partie B : Cercles passant par *n* points du réseau

1. Nombre de solutions entières de l'équation $x^2+y^2=5^n$ (question préliminaire)

À chaque entier naturel n, on associe les ensembles $E_n=\{(x,\ y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}:\ x^2+y^2=5^n\}$ et $F_n=\{z\in Z[i]:\ |z|^2=5^n\}$

1.1. Montrer que E_n et F_n sont deux ensembles finis ayant même cardinal.

1.2. Déterminer F_0.

1.3. Pour tout ω appartenant à F_0 et tout entier p tel que $0\le p\le n$, on pose : $Z_{\omega,\,p}=\omega(2+i)^p(2-i)^{n-p}$.
Prouver que $Z_{\omega,\,p}\in F_n$ et que l'application $(\omega,\ p)\in F_0\times\{0,\,1,\ldots,\,n\}\mapsto Z_{\omega,\,p}\in F_n$ est injective.

1.4. Soit $z = x + i\,y$ un élément de F_n avec n strictement positif. Montrer que $(x,\ y)$ vérifie l'un des systèmes de relations suivants : $\begin{cases} 2x - y \equiv 0\ (5) \\ x + 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} 2x + y \equiv 0\ (5) \\ x - 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$. En déduire que l'un des deux nombres $\dfrac{z}{2+i}$ ou bien $\dfrac{z}{2-i}$ appartient à F_{n-1}

1.5. Prouver que l'application $(\omega,\ p) \in F_0 \times \{0,\ 1, ...,\ n\} \mapsto Z_{\omega,\,p} \in F_n$ est une bijection de $F_0 \times \{0,\ 1, ...,\ n\}$ sur F_n. En déduire le nombre d'éléments de F_n.

2. Cercles passant par un nombre pair de points du réseau

2.1. Pour chaque entier n strictement positif, on pose $A_n = \{(x,\ y) \in E_n\ ;\ x \textit{ pair et } y \textit{ impair}\}$ et $B_n = \{(x,\ y) \in E_n\ ;\ x \textit{ impair et } y \textit{ pair}\}$. Montrer que A_n et B_n ont même cardinal et que : $E_n = A_n \cup B_n\ ;\ A_n \cap B_n = \varnothing$

2.2. Soit k un entier strictement positif. Déterminer le nombre de points du réseau appartenant au cercle de centre le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}.5^{\frac{k-1}{2}}$

2.3. Elaborer un programme permettant, pour une valeur de k donnée, de calculer les coordonnées des points du réseau situés sur le cercle de **2.2.** Application : Points d'un cercle passant par douze points du réseau.

3. Cercles passant par un nombre impair de points du réseau

Soit k un entier strictement positif et Γ_k le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{3}5^k$

Montrer que le nombre de points du réseau appartenant à Γ_k est égal au cardinal de l'ensemble G_k défini par $G_k = \{z = x + i\,y\ ;\ z \in F_{2k}\ ;\ x \equiv -1\ (\mathrm{mod}\, 3)\}\ ;\ y \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 3)$

4. Calcul du cardinal de G_k

4.1. Montrer que quels que soient ω de F_0 et z de F_{2k}, ωz et $\omega \bar{z}$ appartiennent à F_{2k}. Prouver alors que la relation R définie sur F_{2k} par : $\forall (z,\ z') \in F_{2k}$; $zRz' \Leftrightarrow \exists \omega \in F_0$: $\begin{cases} z' = \omega z \\ ou\ bien \\ z' = \omega \bar{z} \end{cases}$ est une relation d'équivalence sur F_{2k}.

On désigne par $(R)(z)$ la classe d'équivalence d'un élément z de F_{2k}.

4.2. Soit $z = x + i\,y$ un élément de F_{2k}.
On suppose $x\,y \neq 0$. Expliciter le éléments de $(R)(z)$ en fonction de x et y et montrer que $(R)(z) \cap G_k$ possède deux éléments.
On suppose $x\,y = 0$. Expliciter le éléments de $(R)(z)$ en fonction de x et y et montrer que $(R)(z) \cap G_k$ possède un élément.

4.3. En déduire que G_k possède $(2\,k + 1)$ éléments.

4.4. Elaborer un programme permettant, pour une valeur de k donnée, de calculer les coordonnées des points de G_k.
Application : Points du cercle ainsi déterminé passant par onze points.

2. Eléments de correction

Partie A : Disques contenant *n* points du réseau

1. Soit B une partie bornée du plan. Il existe un réel K tel que pour tout point M de B, $\max(|x_M|,|y_M|)\leq K$
Soit l'entier $m=E(K)$ où E désigne la partie entière de K. Cet entier est par définition le plus grand entier naturel inférieur ou égal à K.

Pour tout point entier $M\,(x_M\,,y_M)$ appartenant à B : $-m\leq x_M\leq m$; $-m\leq y_M\leq m$. Or il y a entre $-m$ et $+m$ exactement $2m+1$ entiers. La région carrée $\{(x,\ y)\,;\,-m\leq x\leq m\ ;\,-m\leq y\leq m\}$ contient exactement $(2m+1)^2$ points entiers.

B étant inclus dans cette région ne contient qu'un nombre fini de points du réseau, au plus $(2m+1)^2$ points.

2. On rappelle que en raison de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$, quels que soient les *rationnels* a et b : $a+b\sqrt{2}=0\Leftrightarrow a=b=0$

On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$. Pour tout point $M\,(x,\ y)$ du plan :

$$AM^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=x^2+y^2-2\sqrt{2}\,x-\frac{2}{3}y+\frac{19}{9}.$$

Si $M\,(x,\ y)$ et $M'(x',\ y')$ sont deux points quelconques du plan :

$$AM'^2-AM^2=\left(x'^2+y'^2-x^2-y^2-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}y\right)-2\sqrt{2}(x'-x)\text{ de sorte que :}$$

$$AM=AM'\Leftrightarrow\left(x'^2+y'^2-x^2-y^2-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}y\right)-2\sqrt{2}(x'-x)=0.$$

Supposons maintenant que $M\,(x,\ y)$ et $M'(x',\ y')$ soient deux points entiers tels que $AM=AM'$.

$\left(x'^2+y'^2-x^2-y^2-\dfrac{2}{3}y'+\dfrac{2}{3}y\right)$; $(x'-x)$ sont deux rationnels et d'après le rappel du début de la question :

$$AM=AM'\Leftrightarrow\begin{cases}x'^2+y'^2-x^2-y^2-\dfrac{2}{3}y'+\dfrac{2}{3}y=0\\ x'-x=0\end{cases}\text{ ce qui équivaut à : }\begin{cases}(y'-y)\left(y'+y-\dfrac{2}{3}\right)=0\\ x'-x=0\end{cases}$$

Mais y et y' étant deux entiers, $y'+y-\dfrac{2}{3}\neq 0$, quels qu'ils soient.

Ainsi : $AM=AM'\Leftrightarrow\begin{cases}y'-y=0\\ x'-x=0\end{cases}$ c'est-à-dire $AM=AM'\Leftrightarrow M=M'$. Il n'y a pas deux points du réseau à la même distance de A.

L'application : $M\in Z\times Z\mapsto AM\in R^+$ qui à tout point du réseau associe sa distance à A est injective.

3. On peut numéroter ainsi :

On initialise la numérotation en attribuant le numéro 1 au point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$, point du réseau le plus proche de A, désigné désormais par M_1.

Soit S un point du réseau distinct de M_1. L'ensemble $\mathbf{Z}[i] \cap D(A, AS) - \{M_1\}$ où $D(A, AS)$ est le disque fermé de centre A et de rayon AS est non vide (il contient S) et borné. Il contient un nombre fini de points du réseau.
L'ensemble $\{AM\ ;\ M \in \mathbf{Z}[i] \cap D(A, AS) - \{M_1\}\}$ est une partie bornée non vide de $\mathbf{R}^+$: cet ensemble admet un plus petit élément qui correspond à un unique point du réseau. On attribue à ce point le numéro 2. Par construction $AM_1 < AM_2$ et pour tout autre point M du réseau, $AM_2 < AM$

Supposons numérotés n points du réseau : $AM_1 < AM_2 < \ldots < AM_n$ et $AM_n < AM$ pour tout autre point M du réseau. Soit S un point du réseau non numéroté (donc $AM_n < AS$).

On considère l'ensemble : $\mathbf{Z}[i] \cap D(A, AS) - \{M_1, \ldots, M_n\}$ où $D(A, AS)$ est le disque fermé de centre A et de rayon AS. Cet ensemble est non vide et borné, donc contient un nombre fini de points du réseau. L'ensemble $\{AM\ ;\ M \in \mathbf{Z}[i] \cap D(A, AS) - \{M_1, \ldots, M_n\}\}$ est une partie bornée non vide de $\mathbf{R}^+$: cet ensemble admet un plus petit élément, correspondant à un unique point du réseau auquel on attribue le numéro $n+1$. Alors $AM_1 < AM_2 < \ldots < AM_n < AM_{n+1}$ et $AM_{n+1} < AM$ pour tout autre point M du réseau.

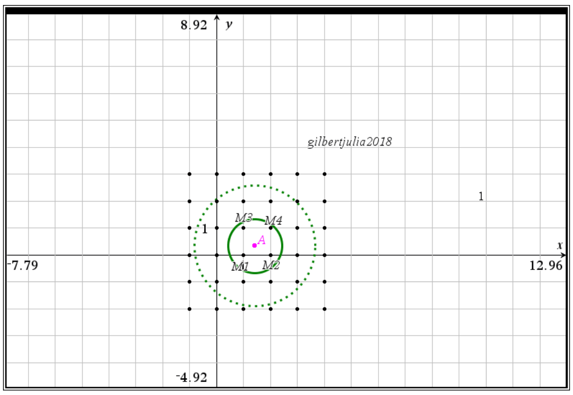
Cette méthode n'oublie aucun point : soit M un point quelconque du réseau. Le disque fermé borné de centre A et de rayon AM ne contient qu'un nombre fini de points. Il existe un point M_s numéroté extérieur au disque. La numération de ce point exige que tous les points plus proches de A aient déjà été numérotés, c'est donc le cas de M.

Ceci construit par récurrence un classement des points du réseau par distances au point A croissantes.

4. Si on considère un réel r tel que $AM_n < r < AM_{n+1}$, le disque de centre A et de rayon r contient strictement les n points $M_1, \ldots, M_n$ mais aucun autre point du réseau. Il contient exactement n points du réseau

Ci-contre, le disque de centre A et de rayon 1 contient quatre points du réseau que l'on a numérotés par distances au point A croissantes.

Ci-contre aussi à titre d'exemple un disque contenant exactement 11 points, il sépare M_{11} et M_{12}.



Partie B : Cercles passant par *n* points du réseau

1.1. L'application $(x,\ y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\mapsto z=x+i\,y\in \mathbf{Z}[\mathbf{i}]$ est une bijection et vu que d'autre part :
$|x+i\,y|^2=5^n \Leftrightarrow x^2+y^2=5^n$, la restriction de cette application à E_n réalise une bijection de E_n sur F_n.
E_n est fini car inclus dans la partie bornée $\left\{(x,\ y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\ \sup(|x|,|y|)\le\left(\sqrt{5}\right)^n\right\}$ du réseau des points entiers.
F_n étant l'image de E_n par une bijection, F_n est fini et a même cardinal que E_n.

1.2. $F_0=\{1\ ;\ -1\ ;\ i\ ;\ -i\}$

1.3. $\left|Z_{\omega,\,p}\right|^2=\left|\omega(2+i)^p(2-i)^{n-p}\right|^2=|\omega|^2\,|2+i|^{2p}\,|2-i|^{2n-2p}\underset{gilbertjulia2018}{=}\left(\sqrt{5}\right)^{2p}\left(\sqrt{5}\right)^{2n-2p}=5^n$ d'où l'appartenance à F_n.

Supposons que $Z_{\omega,\,p}=\omega(2+i)^p(2-i)^{n-p}=\omega'(2+i)^q(2-i)^{n-q}=Z_{\omega',\,q}$.

Alors : $\dfrac{Z_{\omega,\,p}}{Z_{\omega',\,q}}=\dfrac{\omega}{\omega'}\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^{p-q}=1$

En notant $\theta=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ un argument du nombre $2+i$: $\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^{p-q}=\cos 2(p-q)\theta+i\sin 2(p-q)\theta$.

Par ailleurs, puisque ω et ω' appartiennent à F_0, $\dfrac{\omega}{\omega'}\in F_0$, c'est l'un des nombres $\{1\ ;\ -1\ ;\ i\ ;\ -i\}$.

En conséquence : $\dfrac{\omega}{\omega'}(\cos 2(p-q)\theta+i\sin 2(p-q)\theta)=1\Rightarrow 2(p-q)\theta\equiv 0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Il existe un entier k : $(p-q)\theta=k\dfrac{\pi}{4}$. Or, $\theta=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et π ne sont pas commensurables[1] (c'est-à-dire que leur quotient n'est pas un rationnel).

La relation $(p-q)\theta=k\dfrac{\pi}{4}$ ne peut avoir lieu $_{gj}$ que si $p-q=k=0$ donc si $p=q$ et dans ce cas : $\dfrac{\omega}{\omega'}=1$.

On obtient : $Z_{\omega,\,p}=Z_{\omega',\,q}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\omega'\\ p=q\end{cases}$, d'où l'injectivité de l'application $(\omega,\ p)\mapsto Z_{\omega,\,p}$.

1.4. On remarque que pour tous réels x et y : $\begin{cases}4x^2-y^2=4(x^2+y^2)-5y^2\\ x^2-4y^2=x^2+y^2-5y^2\end{cases}$

Soit maintenant $z=x+i\,y\in\mathbf{Z}[\mathbf{i}]$; $|z|^2=x^2+y^2=5^n$. ($n\ge 1$)

Les relations ci-dessus impliquent dans ce cas deux congruences: $\begin{cases}4x^2-y^2\equiv 0\ (5)\\ x^2-4y^2\equiv 0\ (5)\end{cases}$.

La première congruence s'écrit : $(2x-y)\times(2x+y)\equiv 0\ (5)$ et la deuxième : $(x-2y)\times(x+2y)\equiv 0\ (5)$

---

[1] En effet : $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$ et le réel 2θ vérifie les conditions rencontrées dans le problème 1 : son cosinus est un rationnel distinct des valeurs $0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm\dfrac{1}{2}$. Donc 2θ n'est pas commensurable avec le nombre π, et par suite θ non plus.

Puisque 5 est un nombre premier, de la première congruence on déduit que ou bien $2x - y \equiv 0\ (5)$ ou bien $2x + y \equiv 0\ (5)$ et de la deuxième ou bien $x - 2y \equiv 0\ (5)$ ou bien $x + 2y \equiv 0\ (5)$.

On obtient *a priori* quatre combinaisons.

Si $\begin{cases} 2x - y \equiv 0\ (5) \\ x - 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$ on vérifie aisément qu'alors $x \equiv y \equiv 0\ (5)$. De même si $\begin{cases} 2x + y \equiv 0\ (5) \\ x + 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$.

Il reste les deux combinaisons de l'énoncé $\begin{cases} 2x - y \equiv 0\ (5) \\ x + 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} 2x + y \equiv 0\ (5) \\ x - 2y \equiv 0\ (5) \end{cases}$ qui englobent toutes deux le cas $x \equiv y \equiv 0\ (5)$ auquel aboutissent les deux précédentes combinaisons.

Si on s'intéresse aux deux complexes : $\dfrac{x + i\,y}{2 + i} = \dfrac{1}{5}(x + i\,y)(2 - i) = \dfrac{(2x + y) + i(-x + 2y)}{5}$ et $\dfrac{x + i\,y}{2 - i} = \dfrac{1}{5}(x + i\,y)(2 + i) = \dfrac{(2x - y) + i(x + 2y)}{5}$, ces deux nombres ont pour module au carré : $\dfrac{5x^2 + 5y^2}{25} = \dfrac{x^2 + y^2}{5} = 5^{n-1}$.

L'un des deux nombres a des coefficients entiers puisque ou bien $(2x - y)$ et $(x + 2y)$ ou bien $(x - 2y)$ et $(2x + y)$ sont en même temps des multiples de 5.

L'un des deux nombres complexes $\dfrac{x + i\,y}{2 + i}$ ou $\dfrac{x + i\,y}{2 - i}$ appartient à F_{n-1}.

1.5. Il reste à démontrer la surjectivité de l'application.

Soit z un élément de F_n.

On vient de voir que ou bien $\dfrac{z}{2 + i}$ ou bien $\dfrac{z}{2 - i}$ appartient à F_{n-1}. Soit z_{n-1} ce nombre. En itérant le raisonnement, ou bien $\dfrac{z_{n-1}}{2 + i}$ ou bien $\dfrac{z_{n-1}}{2 - i}$ appartient à F_{n-2}. Soit z_{n-2} ce nombre. On va itérer n fois ce même raisonnement pour aboutir en fin de compte à un élément de F_0.

Si on a utilisé p fois la division par $(2 + i)$ et donc $n - p$ fois celle par $(2 - i)$, on aura obtenu :

$\dfrac{z}{(2 + i)^p (2 - i)^{n-p}} = \omega \in F_0$ et par suite $z = Z_{\omega, p}$.

Tout élément de F_n est image d'un élément de $F_0 \times \{0, ..., n\}$. Ce qui justifie la surjectivité.

L'application en question est bijective.

Ces deux ensembles ont même cardinal, à savoir $4 \times (n + 1)$ (puisque F_0 a 4 éléments et $\{0, ..., n\}$ en a $(n + 1)$, leur produit cartésien en a $4 \times (n + 1)$)

2. Cercles passant par un nombre pair de points du réseau

2.1. L'application $(x,\ y) \mapsto (y,\ x)$ de E_n vers lui-même est clairement une involution, échangeant les parties A_n et B_n de E_n. Ces deux parties ont donc le même cardinal. Leur intersection est vide car il n'existe aucun entier à la fois pair et impair : $A_n \cap B_n = \varnothing$

D'autre part : $(x,\ y) \in E_n \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^n$. La somme des deux carrés est un nombre impair. Ce qui implique que l'un des carrés est pair et l'autre impair. Mais dans l'ensemble des entiers, tout entier a la même parité que son carré. Donc ou bien x est pair et y est impair ou bien x est impair et y est pair : $E_n = A_n \cup B_n$. On obtient une partition de E_n en deux parties ayant le même nombre d'éléments.

2.2. Un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient au cercle en question si et seulement si : $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} 5^{k-1}$ c'est-à-dire si et seulement si : $(2x-1)^2 + (2\,y)^2 = 5^{k-1}$.

M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient au cercle en question si et seulement si le point $M'(2x-1,\ 2y)$ appartient à E_{k-1}. L'abscisse de M' étant impaire et l'ordonnée étant paire, M' décrit l'ensemble B_{k-1} dont le cardinal est moitié de celui de E_{k-1}. Ce cardinal est $\dfrac{4((k-1)+1)}{2} = 2\,k$

Le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}.5^{\frac{k-1}{2}}$ passe par exactement $2k$ points du réseau.

3. Cercles passant par un nombre impair de points du réseau

Soit Γ_k le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{3}5^k$

Un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient au cercle Γ_k si et seulement si : $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{9}5^{2k}$

c'est-à-dire si et seulement si : $(3x-1)^2 + 9y^2 = 5^{2k}$

En posant $u = 3x - 1$; $v = 3\,y$, on obtient l'équivalence : $M\,(x,\ y) \in \Gamma_k \Leftrightarrow (\exists\ z = u + i\,v \in F_{2k}) \begin{cases} u = 3x-1 \\ v = 3y \end{cases}$

ce qui revient à dire que $u + i\,v \in F_{2k}$ avec $u + 1 \equiv 0\ (3)$ et $v \equiv 0\ \ (3)$

L'ensemble des points du réseau appartenant à Γ_k est en bijection avec l'ensemble G_k défini par $G_k = \{z = u + i\,v\ ;\ z \in F_{2k}\ ;\ u \equiv -1\ (\mathrm{mod}\,3)\}\ ;\ v \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$

4. Calcul du cardinal de G_k

4.1. Quels que soient ω de F_0 et z de F_{2k} : $|\omega z|^2 = |\omega \bar{z}|^2 = |z|^2 = 5^{2k}$ donc ωz et $\omega \bar{z}$ appartiennent à F_{2k}.

La relation R est une relation d'équivalence du fait essentiellement que F_0 est un groupe multiplicatif stable par la conjugaison. Voyons pourquoi :

La seule vérification non triviale est la transitivité :

$$zRz' \Leftrightarrow \exists \omega \in F_0 \; : \underset{gj}{} \begin{cases} z' = \omega z \\ ou \; bien \\ z' = \omega \bar{z} \end{cases} \; ; \underset{gilbertjlia2018}{} \; z' R z'' \Leftrightarrow \exists \omega \in F_0 \; : \underset{gj}{} \begin{cases} z'' = \omega' z' \\ ou \; bien \\ z' = \omega' \bar{z'} \end{cases} \quad \text{mais alors :}$$

$$z'' = \omega'(\omega z) = (\omega \omega') z \;\; ou \; bien \;\; z'' = \omega'(\omega \bar{z}) = (\omega' \omega) \bar{z} \;\; ou \; bien \;\; z'' = \omega' \overline{(\omega z)} = (\omega' \bar{\omega}) \bar{z} \;\; ou \; bien \;\; z'' = \omega' \overline{(\omega \bar{z})} = (\omega' \bar{\omega}) z$$

ce qui implique, quel que soit le cas, que zRz'' appartient à F_0 car le produit de deux éléments de F_0 ou de conjugués de tels éléments appartient à F_0

On désigne par $(R)(z)$ la classe d'équivalence d'un élément z de F_{2k}.

4.2. Soit $z = x + i\,y$ un élément de F_{2k}. De façon générale :

$(R)(x + i\,y) \underset{gilbertjulia2018}{=} \{x + i\,y \; ; x - i\,y \; ; -x + i\,y \; ; -x - i\,y \; ; \; y + i\,x \; ; \; y - i\,x \; ; -y + i\,x \; ; -y - i\,x\}$.

Il y a dans cette classe 8 éléments distincts lorsque $x\,y \neq 0$, et sinon, si x ou y est nul, certains d'entre eux sont confondus, il n'y a plus que 4 éléments distincts (disons x ; $-x$; $i\,x$; $-i\,x$).

Supposons que $z = x + i\,y$ soit un élément de G_k tel que $x\,y \neq 0$: $z = x + i\,y \; avec \underset{gilbertjulia2018}{} \begin{cases} x \equiv 2 \; (3) \\ y \equiv 0 \; (3) \end{cases}$.

Alors parmi les 8 éléments de sa classe d'équivalence seul son conjugué vérifie les mêmes congruences. Dans la classe de z, il y a exactement deux éléments de G_k. (Il y en a donc 2 parmi 8).

Supposons que $z = x + i\,y$ soit un élément de G_k : $z = x + i\,y \; avec \underset{gjulia}{} \begin{cases} x \equiv 2 \; (3) \\ y \equiv 0 \; (3) \end{cases}$ mais tel que $x\,y = 0$. Le réel nul ne peut être que y, c'est-à-dire que l'on a $z = x \; avec \; x \equiv 2 \; (3)$. Alors il est le seul parmi les 4 éléments de sa classe d'équivalence à vérifier ces congruences. (Il y en a donc un parmi 4).

4.3. L'ensemble F_{2k} possède $4(2k+1)$ éléments. On note que, quel que soit le cas de figure, un élément sur 4 appartient à G_k ; cet ensemble possède $(2\,k+1)$ éléments.

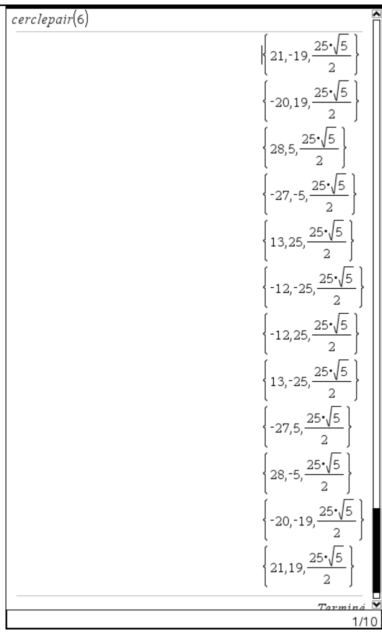
Le cercle Γ_k passe par $(2\,k+1)$ points du réseau.

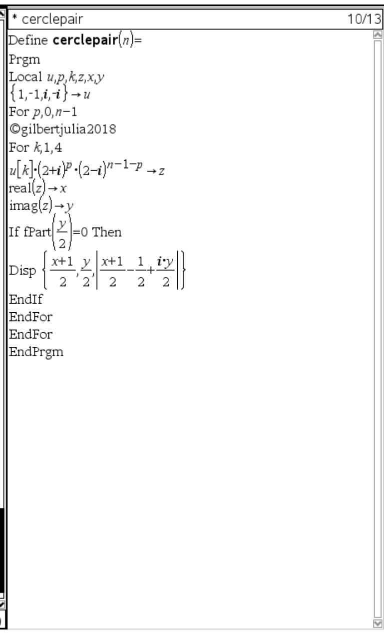
En conclusion on a donné l'exemple d'un cercle passant par un nombre pair donné de points du réseau, puis l'exemple d'un cercle passant par un nombre impair donné de points de ce réseau, ce qui prouve l'existence de cercles passant par un nombre déterminé de points.

Toute translation d'un vecteur à coordonnées entières de ces cercles donnerait d'autres cercles ayant les mêmes propriétés.

2.3. Le programme **cerclepair** recherche le »s coordonnées des points du réseau qui sont sur le cercle étudié en **question 2**.

Il est exécuté à titre d'exemple à propos d'un cercle passant par douze points du réseau.





4.4. De même, le programme **cerclimpair** recherche les coordonnées des points du réseau qui sont sur le cercle dont il est question en **3 et 4**.

Il est exécuté à titre d'exemple à propos d'un cercle passant par onze points du réseau.