Ecrit2. Problème 3. Equation de Pell-Fermat

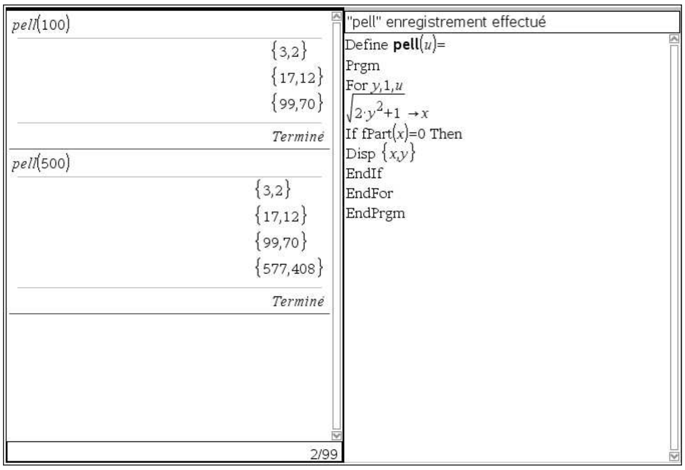
Question 1.

Pour tout entier p de $\mathbb{N}^*$ la somme des p premiers entiers strictement positifs est égale à $\frac{p(p+1)}{2}$. En conséquence : $\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k \Leftrightarrow \frac{m(m+1)}{2} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{m-1} k\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2}$.

On obtient : $\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k \Leftrightarrow 2m^2 = n^2 + n$. Si l'on pose : $x = 2n+1$ et $y = 2m$ alors : $n^2 + n = \frac{x^2-1}{4}$ et $2m^2 = \frac{y^2}{2}$. Donc : $\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 2m \\ \frac{x^2-1}{4} = \frac{y^2}{2} \text{ soit } x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

Questions 2 et 3.

Le programme **pell**, muni d'un argument u, recherche systématiquement les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers solutions de (E) tels que $1 \le y \le u$. On peut le lancer notamment pour la valeur $u = 100$.
La plus petite des solutions y est mise en évidence.



Question 4.

Compte tenu de la plus petite des solutions, l'initialisation des deux suites est : $x_1 = 3$; $y_1 = 2$. Supposons que, à l'ordre n, il existe deux entiers de $\mathbb{N}^*$ x_n ; y_n tels que : $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. Alors au rang suivant : $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = (3x_n + 4y_n) + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2}$. Par stabilité de la multiplication et de l'addition dans $\mathbb{N}^*$, si x_n ; y_n sont des entiers strictement positifs, il en est de même de $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et de $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ formules qui constituent les formules de récurrence **4.2**

4.3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} - y_n = 2x_n + 2y_n$. La stabilité de la multiplication et de l'addition dans $\mathbb{N}^*$ assure que : $x_{n+1} - x_n \in \mathbb{N}^*$ et que : $y_{n+1} - y_n \in \mathbb{N}^*$, ces différences sont toutes deux strictement positives ce qui prouve la croissance de chacune des deux suites. On en déduit alors que : $x_{n+1} - x_n \ge 2x_1 + 4y_1 = 14$ et $y_{n+1} - y_n \ge 2x_1 + 2y_1 = 10$ donc par récurrence évidente que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $x_n \ge x_1 + 14(n-1)$ et $y_n \ge y_1 + 10(n-1)$ ce qui prouve que les deux suites, minorées par des suites divergentes vers $+\infty$, divergent elles-mêmes vers $+\infty$.

Question 5.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: ${x_{n+1}}^2-2{y_{n+1}}^2=(3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2={x_n}^2-2{y_n}^2$. La suite de terme général $\left({x_n}^2-2{y_n}^2\right)$ est une suite constante. Or, son premier terme ${x_1}^2-2{y_1}^2$ vaut 1, donc tous ses termes valent 1. Tous les couples $(x_n\ ;\ y_n)_{n\in N^*}$ sont des solutions de (E).

Questions 6 et 7.

Soit S_1 l'ensemble de tous les couples $(x\ ;\ y)$ solutions de (E). (L'ensemble S_1 contient donc S).

Notons d'abord que, si $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont solutions de (E) et si $y'=y$, alors : $y'=y\Rightarrow x'^2=x^2$ et dans $\mathbb{N}^*$: $x'^2=x^2\Rightarrow x'=x$. Dans S_1, il n'y a pas deux couples distincts avec le même y.

Si on suppose maintenant que $y'<y$ alors $2y'^2+1<2y^2+1$ c'est-à-dire : $x'^2<x^2$ ce qui implique dans $\mathbb{N}^*$ que : $x'<x$. Et si $y'<y$ et $x'<x$, alors $x'+y'\sqrt{2}<x+y\sqrt{2}$. Les nombres $z=x+y\sqrt{2}$ où $(x\ ;\ y)$ appartient à S_1 sont rangés dans le même ordre que leur y.

Compte tenu que l'algorithme de la question 2 a balayé toutes les possibilités d'appartenance d'un couple $(x\ ;\ y)$ à S_1 avec $y\le 100$, l'entier Y, à supposer qu'il existe, est au moins égal à 101 et l'ensemble $\{y_k\in N^*\ ;\ y_k<Y\}$ contient au moins les trois entiers $y_1=2\ ;\ y_2=12\ ;\ y_3=70$ (il est donc non vide). Il a un seul plus grand élément, que l'on note y_N et l'on peut affirmer que $N\ge 3$. Par stricte croissance de la suite (y_n) : $y_N<y_{N+1}$. Mais d'après le statut de y_N, nécessairement : $Y\le y_{N+1}$. Puisque (X,Y) appartient à S_1 et est censé ne pas se trouver dans S, d'après la remarque préalable à cette question : $Y\ne y_{N+1}$. L'inégalité est stricte et finalement $y_N<Y<y_{N+1}$

Question 8.

Si $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont solution de (E) et si $y'<y$ alors $2y'^2+1<2y^2+1$ c'est-à-dire : $x'^2<x^2$ ce qui implique dans $\mathbb{N}^*$ que : $x'<x$. Et si $y'<y$ et $x'<x$, alors $x'+y'\sqrt{2}<x+y\sqrt{2}$. Les divers nombres $z=x+y\sqrt{2}$ où $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) sont rangés dans le même ordre que leur y.

D'où le rangement : $x_N+y_N\sqrt{2}<X+Y\sqrt{2}<x_{N+1}+y_{N+1}\sqrt{2}$

Question 9.

Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ élément de S_1 : $(3x-4y)+(-2x+3y)\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(x+y\sqrt{2}\right)$. Les nombres $(3x-4y)+(-2x+3y)\sqrt{2}$ sont rangés dans le même ordre que les nombres $\left(x+y\sqrt{2}\right)$, eux-mêmes rangés dans le même ordre que leur y.

Or l'application $(x\ ;\ y)\mapsto(3x-4y\ ;\ -2x+3y)$ est précisément l'application réciproque de $(x\ ;\ y)\mapsto(3x+4y\ ;\ 2x+3y)$. Elle laisse stable l'ensemble S_1 sous réserve que $3x-4y$ et $-2x+3y$ soient des entiers strictement positifs (on peut vérifier que : $(3x-4y)^2-2(-2x+3y)^2=x^2-2y^2$). Elle envoie donc le couple $(x_N\ ;\ y_N)$ sur $(x_{N-1}\ ;\ y_{N-1})$ et le couple $(x_{N+1}\ ;\ y_{N+1})$ sur $(x_N\ ;\ y_N)$. En l'appliquant aux termes du rangement de la question 8 : $x_{N-1}+y_{N-1}\sqrt{2}<(3X-4Y)+(-2X+3Y)\sqrt{2}<x_N+y_N\sqrt{2}$

Question 10.

L'application $(x\ ;\ y)\mapsto(3x-4y\ ;\ -2x+3y)$ envoie un élément de l'ensemble S_1 sur un élément de S_1 sous réserve que $3x-4y$ et $-2x+3y$ soient des entiers strictement positifs (on peut vérifier que : $(3x-4y)^2-2(-2x+3y)^2=x^2-2y^2$).

10.1. Vu que pour tous les couples de S_1 et en particulier pour le couple $(X\ ;Y)$: $x^2-2y^2=\left(x-y\sqrt{2}\right)\left(x+y\sqrt{2}\right)=1$, on peut dire que : $x-y\sqrt{2}=\dfrac{1}{\left(x+y\sqrt{2}\right)}>0$. On en déduit pour tous les couples de S_1 et en particulier pour $(X\ ;Y)$: $3x>3\sqrt{2}\,y>4y$. Donc l'entier $3X-4Y$ appartient à $\mathbb{N}^*$

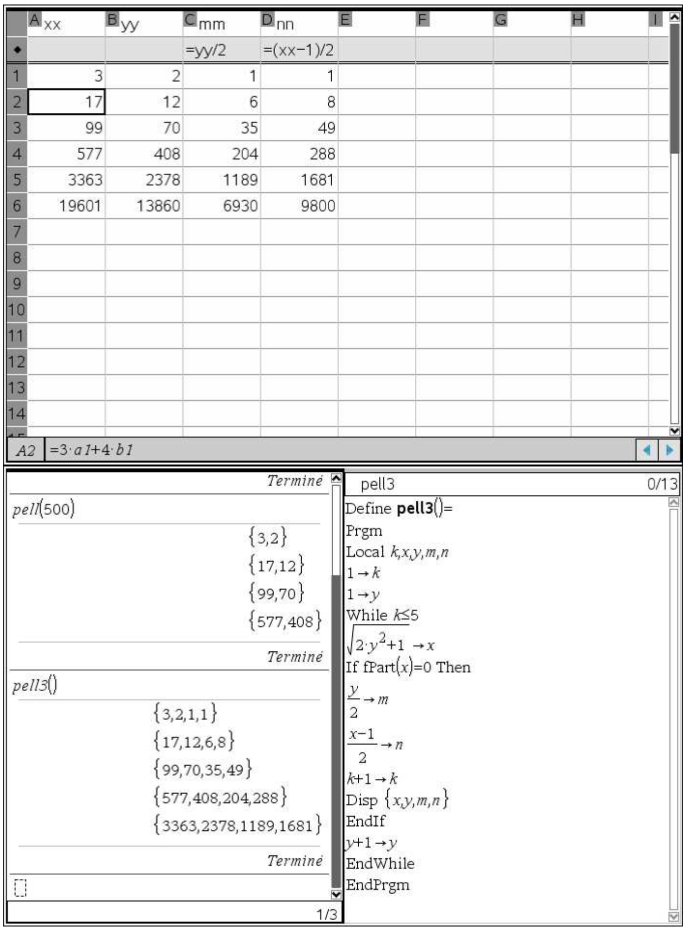
10.2. $3Y-2X>y_{N-1}\geq y_2>0$. L'entier $-2X+3Y$ appartient à $\mathbb{N}^*$. Dès lors, $(3X-4Y)+(-2X+3Y)\sqrt{2}$ appartient à S_1.

10.3. On dispose du rangement :
$x_{N-1}+y_{N-1}\sqrt{2}<(3X-4Y)+(-2X+3Y)\sqrt{2}<x_N+y_N\sqrt{2}<X+Y\sqrt{2}<x_{N+1}+y_{N+1}\sqrt{2}$ et ces nombres sont rangés dans le même ordre que leurs y. En conséquence : $-2X+3Y<Y$
Autrement dit s'il existe une solution de(E) située strictement entre celle de rang n et celle de rang $n+1$, il y en a une située strictement entre celle de rang $n-1$ et celle de rang n.

Question 11.
En itérant la construction, on peut construire de proche en proche des éléments de S_1 situés strictement entre ceux de S. Au bout du compte, on va en trouver une entre la première et la deuxième, ce qui contredirait les conclusions du programme de la question 3. Nécessairement, $S_1\subset S$. Il n'y a pas d'autre solution que celles construites par récurrence en question 4.

Le tableur peut construire de proche en proche les solutions. Les listes **xx** et **yy** sont initialisées sur leur première ligne, les formules de récurrence sont écrites sur la ligne 2 puis recopiées vers le bas.

Un programme **pell3** modifié permet d'obtenir systématiquement toutes les solutions jusqu'à la cinquième. On retrouve les mêmes résultats que ceux de l'écran précédent.



	A xx	B yy	C mm	D nn
◆			=yy/2	=(xx−1)/2
1	3	2	1	1
2	17	12	6	8
3	99	70	35	49
4	577	408	204	288
5	3363	2378	1189	1681
6	19601	13860	6930	9800

A2 =3·a1+4·b1

```
Terminé
pell(500)
{3,2}
{17,12}
{99,70}
{577,408}
Terminé
pell3()
{3,2,1,1}
{17,12,6,8}
{99,70,35,49}
{577,408,204,288}
{3363,2378,1189,1681}
Terminé
```

```
pell3                                    0/13
Define pell3()=
Prgm
Local k,x,y,m,n
1→k
1→y
While k≤5
√(2·y^2+1) →x
If fPart(x)=0 Then
y/2 → m
(x−1)/2 → n
k+1→k
Disp {x,y,m,n}
EndIf
y+1→y
EndWhile
EndPrgm
```