Les sept boules de cristal

L'idée de cet exercice est inspirée du problème 2 de probabilités posé au Concours Général 2021. *Il n'est pas vraiment destiné aux capésiens, il serait bien étonnant qu'un sujet de ce calibre soit proposé, c'est même carrément impossible.*

Il est plutôt destiné à celles et ceux qui s'intéressent aux thèmes mathématiques insolites et sortant des sentiers battus. Les auteurs des sujets type « Concours Général » sont orfèvres en la matière, qu'ils en soient ici remerciés.

L'objectif visé est ici d'obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire D_n qui est évoquée dans le sujet original du CG2021.

L'expérience

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $(2n+1)$ boules indiscernables numérotées 0, 1, 2,...$2n$.

On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- On tire trois boules simultanément. On appellera dans l'exercice « sélection » un tel tirage de trois boules.
- Si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b.
- On recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule et on note D_n son numéro. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2n$, on note $P([D_n = k])$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

L'objectif de l'exercice est de construire la loi de la variable aléatoire D_n.

Une simulation

Le programme **milieu**, écrit avec la syntaxe TI-Nspire, simule le déroulement d'une telle expérience.

On l'a fait fonctionner avec $n = 5$, c'est-à-dire que le sac contient initialement 11 boules numérotées de 0 à 10.

Successivement, lors des trois essais, la « dernière boule » a été la boule numéro 6, puis numéro 4, puis numéro 5.

```
milieu(5)
  tirage numéro 1 ; sélection {3,7,10} ; sac {0,1,2,4,5,6,7,8,9}
  tirage numéro 2 ; sélection {0,5,8} ; sac {1,2,4,5,6,7,9}
  tirage numéro 3 ; sélection {2,4,5} ; sac {1,4,6,7,9}
  tirage numéro 4 ; sélection {4,6,7} ; sac {1,6,9}
  tirage numéro 5 ; sélection {1,6,9} ; sac {6}
                                                    Terminé
milieu(5)
  tirage numéro 1 ; sélection {3,6,8} ; sac {0,1,2,4,5,6,7,9,10}
  tirage numéro 2 ; sélection {2,6,10} ; sac {0,1,4,5,6,7,9}
  tirage numéro 3 ; sélection {6,7,9} ; sac {0,1,4,5,7}
  tirage numéro 4 ; sélection {0,4,7} ; sac {1,4,5}
  tirage numéro 5 ; sélection {1,4,5} ; sac {4}
                                                    Terminé
milieu(5)
  tirage numéro 1 ; sélection {6,9,10} ; sac {0,1,2,3,4,5,7,8,9}
  tirage numéro 2 ; sélection {0,3,4} ; sac {1,2,3,5,7,8,9}
  tirage numéro 3 ; sélection {2,3,9} ; sac {1,3,5,7,8}
  tirage numéro 4 ; sélection {1,5,8} ; sac {3,5,7}
  tirage numéro 5 ; sélection {3,5,7} ; sac {5}
                                                    Terminé
```

```
milieu                                              9/18
Define milieu(n)=
Prgm
Local m,x,l,s,u,v
Define l=seq(x,x,0,2·n)
For m,1,n
 Define s=randSamp(l,3,1)
 SortA s
© gilbertjulia2021
 For u,1,dim(l)
  If l[u]=s[1] Then
 augment(left(l,u−1),right(l,dim(l)−u))→l
  EndIf
 EndFor
 For v,1,dim(l)
  If l[v]=s[3] Then
 augment(left(l,v−1),right(l,dim(l)−v))→l
  EndIf
 EndFor
 Disp "tirage numéro ",m,"; sélection ",s,"; sac ",l
EndFor
EndPrgm
```

Le programme **essaismilieu** simule un certain nombre e de fois l'expérience et compte, dans l'ordre, le nombre de fois que l'on obtient chaque numéro *a priori* possible. On l'a fait fonctionner avec 10000 essais lorsque $n = 3$ (donc 7 boules dans le sac) puis lorsque $n = 4$ (donc 9 boules dans le sac).

Ce qui peut donner une première idée de la loi de probabilité de D_3 et de celle de D_4.

```
essaismilieu(10000,3)
                         {0,307,1607,6151,1637,298,0}
                                                    Terminé
essaismilieu(10000,3)
                         {0,306,1618,6204,1570,302,0}
                                                    Terminé
essaismilieu(10000,3)
                         {0,293,1551,6245,1629,282,0}
                                                    Terminé
essaismilieu(10000,4)
                 {0,118,516,1880,4890,1924,544,128,0}
                                                    Terminé
essaismilieu(10000,4)
                 {0,119,557,1927,4841,1904,532,120,0}
                                                    Terminé
essaismilieu(10000,4)
                 {0,136,536,1862,4957,1857,519,133,0}
                                                    Terminé
```

```
"essaismilieu" enregistr. effectué
Define essaismilieu(e,n)=
Prgm
Local b,m,x,l,s,u,v
newList(2·n+1)→b
For i,1,e
Define l=seq(x,x,0,2·n)
For m,1,n
 Define s=randSamp(l,3,1)
 SortA s
© gilbertjulia2021
 For u,1,dim(l)
  If l[u]=s[1] Then
 augment(left(l,u−1),right(l,dim(l)−u))→l
  EndIf
 EndFor
 For v,1,dim(l)
  If l[v]=s[3] Then
 augment(left(l,v−1),right(l,dim(l)−v))→l
  EndIf
 EndFor
EndFor
b[l[1]+1]+1→b[l[1]+1]
EndFor
Disp b
EndPrgm
```

Le sujet

Partie I : Etude de petits cas

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.

2. On suppose dans cette question que $n=2$.

2.1. Justifier que lors du premier tirage, il y a 10 sélections possibles, que l'on précisera.

2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

Partie II : Valeurs extrêmes et symétrie

1. Déterminer la probabilité $P([D_n=0])$ et la probabilité $P([D_n=2n])$

2. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire D_n ?

3. Soit i un entier tel que $0\leq i\leq 2n$. Pourquoi a-t-on : $P([D_n=2n-i])=P([D_n=i])$?

Partie III : La probabilité que D_n prenne la valeur 1

Dans cette partie, n est un entier naturel au moins égal à 2. On s'intéresse à la probabilité que D_n prenne la valeur 1, mais à l'occasion, on obtient des résultats plus généraux qui serviront ultérieurement.

1.1. Exprimer en fonction de n le nombre de sélections différentes que l'on peut obtenir lors du premier tirage.

1.2. Parmi elles, combien de sélections ne contiennent ni la boule 0 ni la boule numéro 1 ? En déduire la probabilité que les deux boules numéros 0 et numéro 1 soient encore dans le sac au deuxième tirage.

2.1. Soit m un entier tel que $2\leq m\leq n-1$. Exprimer en fonction de m et de n le nombre de sélections différentes que l'on peut obtenir lors du tirage numéro m.

2.2. On suppose que les deux boules numéro 0 et numéro 1 sont toujours dans le sac juste avant l tirage numéro m. Quelle est la probabilité conditionnelle, sachant que ces deux boules étaient dans le sac avant ce tirage, qu'elles y soient encore après ?

3.1. Exprimer en fonction de n la probabilité $P([D_n=1])$ et en même temps la probabilité $P([D_n=2n-1])$

3.2. Application numérique : exprimer $P([D_3=1])$ et $P([D_4=1])$

Partie IV : La probabilité que D_n prenne la valeur 2

Dans cette partie, n est un entier naturel au moins égal à 2. On s'intéresse à la probabilité que D_n prenne la valeur 2.

Soit a, b, c les numéros des trois boules constituant la première sélection, avec $a < b < c$.

1. Soit H l'évènement selon lequel $2 < a$.

1.1. Calculer la probabilité $P(H)$ de l'évènement H.

1.2. Expliquer pourquoi $P_H([D_n = 2]) = P([D_{n-1} = 2])$ où P_H désigne la probabilité conditionnelle sachant H.

2. Soit I l'évènement selon lequel $a < 2 < c$

2.1. Calculer la probabilité $P(I)$ de l'évènement I.

2.2. Expliquer pourquoi $P_I([D_n = 2]) = P([D_{n-1} = 1])$ où P_I désigne la probabilité conditionnelle sachant I.

3.1. En déduire que :

$$P([D_n = 2]) = \frac{2(n-2)(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)(2n+1)} P([D_{n-1} = 2]) + \frac{12(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P([D_{n-1} = 1]).$$

3.2. Application numérique : vérifier que $P([D_3 = 2]) = \dfrac{4}{25}$

Partie V : Un brin de récurrence

On suppose dans cette partie que n est un entier au moins égal à 3. On suppose aussi que la loi de probabilité de la variable aléatoire D_{n-1} avec succès et l'on se propose de construire la loi de probabilité de la variable aléatoire D_n.

On considère un entier k tel que $2 \leq k \leq n$ et on va examiner ce qu'il peut se passer à son propos lors du premier tirage.

Soit a, b, c les numéros des trois boules constituant la première sélection, avec $a < b < c$.

1. Soit G l'évènement selon lequel $c < k$.

1.1. Calculer la probabilité $P(G)$ de l'évènement G.

1.2. Expliquer pourquoi $P_G\left([D_n = k]\right) = P\left([D_{n-1} = k-2]\right)$ où P_G désigne la probabilité conditionnelle sachant G.

2. Soit H l'évènement selon lequel $k < a$.

2.1. Calculer la probabilité $P(H)$ de l'évènement H.

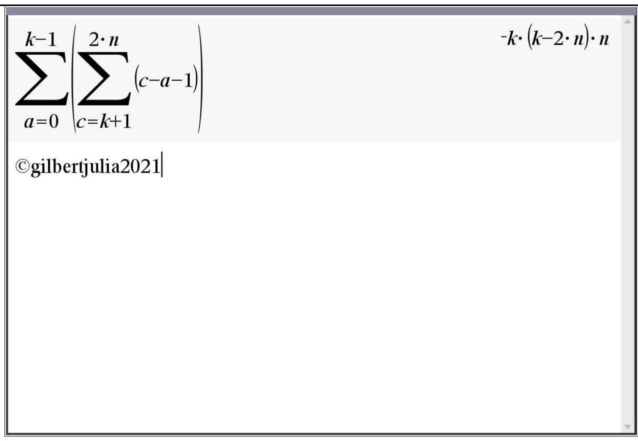
2.2. Expliquer pourquoi $P_H\left([D_n = k]\right) = P\left([D_{n-1} = k]\right)$ où P_H désigne la probabilité conditionnelle sachant H.

3. Soit I l'évènement selon lequel $a < k < c$.

3 .1. Le nombre de sélections réalisant cet évènement s'exprime ainsi : $\displaystyle\sum_{a=0}^{k-1}\left(\sum_{c=k+1}^{2n} c-a-1\right)$.

Un logiciel de calcul formel nous en fournit une expression sympathique : ce nombre est égal à $k \times n \times (2n-k)$ (vous pouvez vérifier si le cœur vous en dit).

Exprimer la probabilité de I.



3.2. Expliquer pourquoi $P_I\left([D_n = k]\right) = P\left([D_{n-1} = k-1]\right)$ où P_I désigne la probabilité conditionnelle sachant I.

4. Exprimer une relation de récurrence donnant $P\left([D_n = k]\right)$ en fonction de $P\left([D_{n-1} = k]\right)$, $P\left([D_{n-1} = k-1]\right)$, $P\left([D_{n-1} = k-2]\right)$.

5. *Applications numériques*.

Donner, en exploitant cette relation de récurrence, la loi de la variable aléatoire D_3 puis celle de D_4.

Eléments de correction.

Partie I : Etude de petits cas

1. Si $n=1$, le sac ne contient que trois boules, numérotées 0, 1 et 2 et nécessairement tirées toutes les trois à la fois. La variable aléatoire D_1 prend uniquement la valeur 1 avec la probabilité 1.

2. Si $n = 2$, le sac contient cinq boules, numérotées 0, 1, 2, 3 et 4.

2.1. Il y a $\binom{5}{3}=10$ façons différentes d'extraire trois boules parmi cinq.

2.2. Il est envisageable de décrire une par une les éventualités qui se présentent :

Tirage 1	Eliminées	Tirage 2	Valeur de D_2
0, 1, 2	0 et 2	1, 3, 4	3
0, 1, 3	0 et 3	1, 2, 4	2
0, 1, 4	0 et 4	1, 2, 3	2
0, 2, 3	0 et 3	1, 2, 4	2
0, 2, 4	0 et 4	1, 2, 3	2
0, 3, 4	0 et 4	1, 2, 3	2
1, 2, 3	1 et 3	0, 2, 4	2
1, 2, 4	1 et 4	0, 2, 3	2
1, 3, 4	1 et 4	0, 2, 3	2
2, 3, 4	2 et 4	0, 1, 3	1

La variable aléatoire D_2 prend les valeurs 1, 2, 3 avec les probabilités, respectivement : $\frac{1}{10}, \frac{8}{10}, \frac{1}{10}$

Partie II : Valeurs extrêmes et symétrie

1. L'évènement « $D_n = 0$ » est l'évènement impossible, sa probabilité est égale à 0 car la boule 0 est nécessairement éliminée, c'est le plus petit numéro. Il en est de même du plus grand numéro $2n$.

2. D_n prend toutes les valeurs entières de 1 à $2n-1$

3. Imaginons que les boules soient numérotées non seulement de 0 à $2n$, mais aussi de $2n$ à 0, chaque boule étant dotée de deux numérotations, i et $2n-i$. On note D'_n la variable aléatoire égale au numéro auxiliaire de la dernière boule. D'une part le protocole de l'expérience n'est pas modifié par une numérotation « descendante », D'_n suit la même loi que D_n : $P([D_n'=i])=P([D_n=i])$ pour tout i de 0 à $2n$ et d'autre part les éventualités qui réalisent l'évènement $[D_n'=i]$ sont les mêmes que celles qui réalisent l'évènement $[D_n=2n-i]$, c'est-à-dire que $P([D_n'=i])=P([D_n=2n-i])$.

On en déduit que $P([D_n=i])=P([D_n=2n-i])$ pour tout i de 0 à $2n$.

Partie III : La probabilité que D_n prenne la valeur 1

1. D_n prend la valeur 1 si et seulement si la boule 1 figure dans le dernier tirage en même temps que la boule numéro 0, donc si et seulement si aucune des deux boules n'a été tirée avant (si la boule 0 apparaît dans un tirage précédent, la boule 1 devient celle de plus petit numéro et, nécessairement, elle sera éliminée).

1.1. Il s'agit lors du premier tirage d'extraire simultanément trois boules parmi $(2n+1)$ boules.

Le nombre de sélections différentes est : $s_1 = \binom{2n+1}{3} = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

1.2. Lors du premier tirage, les sélections qui ne contiennent ni la boule 0 ni la boule 1 se font parmi les $(2n-1)$ autres boules.

Le nombre de telles sélections est : $\binom{2n-1}{3} = \dfrac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{3}$

1.3. La probabilité qu'il en soit ainsi est le quotient des deux nombres, soit $\dfrac{(n-1)(2n-3)}{n(2n+1)}$.

2.1. Avant le tirage numéro m, il y a eu $(m-1)$ tirages qui ont éliminé chacun deux boules. Il reste dans le sac $2n+1-2(m-1)=2n-2m+3$ boules. Le nombre de sélections différentes est $\binom{2n-2m+3}{3}$ (il n'y a pas lieu d'expliciter ce nombre).

2.2. Parmi ces sélections, $\binom{2n-2m+1}{3}$ ne contiennent ni la boule 0 ni la boule 1. La probabilité conditionnelle qu'il en soit ainsi est le quotient des deux nombres, soit $\dfrac{(n-m)(2n-2m+1)}{(n-m-1)(2n-2m-3)}$.

Mais l'expression sous forme de quotient : $\dfrac{\binom{2n-2m+1}{3}}{\binom{2n-2m+3}{3}}$ est plus profitable.

3. L'évènement « $[D_n = 1]$ est l'intersection des évènements « ni la boule 0 ni la boule 1 n'ont été sélectionnées lors du tirage numéro m » pour m allant de 1 à $n-1$.

Si T_m désigne l'évènement « après la m^{e} sélection, les boules 0 et 1 sont toujours dans le sac », $P([D_n = 1]) = P(T_1) \times \prod_{m=2}^{n-1} P_{T_m}(T_{m+1})$.

Il s'agit du produit des probabilités précédentes. On note qu'en effectuant ce produit, on obtient des éliminations « en domino », il ne reste que les facteurs extrêmes : $P([D_n = 1]) = \dfrac{1}{\binom{2n+1}{3}} = \dfrac{3}{n(2n-1)(2n+1)}$

Ce nombre est aussi $P([D_n = 2n-1])$.

Ainsi par exemple $P([D_2 = 1]) = \dfrac{1}{10}$; $P([D_3 = 1]) = \dfrac{1}{35}$; $P([D_4 = 1]) = \dfrac{1}{84}$

Partie IV : La probabilité que D_n prenne la valeur 2

1. Soit H l'évènement selon lequel $2 < a$.

1.1. Il y a $\binom{2n-2}{3} = \dfrac{2(n-2)(n-1)(2n-3)}{3}$ sélections telles que $a > 2$

La probabilité $P(H)$ de l'évènement H est le quotient de ce nombre par s_1 soit : $\dfrac{2(n-2)(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)(2n+1)}$

1.2. Si l'évènement H est réalisé, on peut après le premier tirage réindexer les boules en enlevant une unité à celles dont le numéro est entre $a+1$ et $c-1$ et deux unités à celles dont le numéro est strictement plus grand que c. On reconstitue pour les tirages suivants la même expérience que l'expérience initiale mais avec deux boules de moins, la boule 2 gardant son numéro initial. D'où : $P_H([D_n = 2]) = P([D_{n-1} = 2])$ où P_H désigne la probabilité conditionnelle sachant H.

2. Soit I l'évènement selon lequel $a < 2 < c$

2.1. Pour que l'évènement I soit réalisé il faut que a soit la boule 0 ou la boule 1, que c soit au moins égal à 3, et que, une fois a et c fixés, b prenne une valeur strictement comprise entre a et c (c'est-à-dire $c-a-1$ valeurs possibles). Le nombre de sélections convenable s'exprime sous forme d'une somme double : $\sum_{a=0}^{a=1}\left(\sum_{c=3}^{2n}(c-a-1)\right)$ ou bien : $\sum_{c=3}^{2n}(c-1) + \sum_{c=3}^{2n}(c-2)$ ou encore : $\sum_{c=3}^{2n}(2c-3)$

Il s'agit là d'une somme des $2n-3$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et dont le terme initial est égal à 3 : cette somme vaut $4n(n-1)$.

La probabilité $P(I)$ de l'évènement I est : $P(I) = \dfrac{12(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$

2.2. Si l'évènement I s'est réalisé, on peut après le premier tirage réindexer les boules en enlevant une unité à celles dont le numéro est entre $a+1$ et $c-1$ et deux unités à celles dont le numéro est strictement plus grand que c. On reconstitue pour les tirages suivants la même expérience avec deux boules de moins, la boule 2 ayant maintenant le numéro 1 puisqu'elle est entre a et c. D'où : $P_I([D_n = 2]) = P([D_{n-1} = 1])$ où P_I désigne la probabilité conditionnelle sachant I.

3. La réunion des deux évènements H et I représente l'évènement « la boule 2 est encore présente après le premier tirage ». Par conséquent :

$$[D_n=2]=\left([D_n=2]\cap H\right)\cup\left([D_n=2]\cap I\right) \text{ et } P\left([D_n=2]\right)=P(H)\times P_H\left([D_n=2]\right)+P(I)\times P_I\left([D_n=2]\right)$$

On en déduit la relation : $P\left([D_n=2]\right)=\dfrac{2(n-2)(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)(2n+1)}P\left([D_{n-1}=2]\right)+\dfrac{12(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}P\left([D_{n-1}=1]\right)$

Lorsque $n=2$, on retrouve : $P\left([D_2=2]\right)=0+\dfrac{12}{3\times 5}P\left([D_1=1]\right)=\dfrac{4}{5}$.

Lorsque $n=3$, on obtient $P\left([D_3=2]\right)=\dfrac{2\times 2\times 3}{3\times 5\times 7}P\left([D_2=2]\right)+\dfrac{12\times 2}{5\times 7}P\left([D_2=1]\right)=\dfrac{4}{35}\times\dfrac{8}{10}+\dfrac{24}{35}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{25}$.

Partie V : Un brin de récurrence

Soit a, b, c les numéros des trois boules constituant la première sélection, avec $a<b<c$.

Les boules a et c sont éliminées. Pour les tirages suivants, imaginons une réindexation des boules restantes. Soit x le numéro d'une boule restante.

- Si $x\le a-1$ (numéros plus petits que le plus petit numéro tiré), on conserve le même numéro.
- Si $a+1\le x\le c-1$ (numéros intermédiaires entre les deux numéros tirés), on diminue d'une unité l'ancien numéro.
- Si $c+1\le x\le 2n$ (numéros plus grands que le plus grand numéro tiré), on diminue de deux unités l'ancien numéro.

Pour les tirages suivants, les conditions de l'expérience décrite par l'énoncé sont fidèlement reconstituées, mais avec deux boules de moins.

NB. On note $s_1=\dbinom{2n+1}{3}$ le nombre de premières sélections possibles.

1. Soit G l'évènement selon lequel $c<k$.

1.1. L'évènement G est réalisé si et seulement si les trois boules tirées figurent parmi les k boules numérotées de 0 à $(k-1)$. Il y a $\dbinom{k}{3}$ premières sélections qui réalisent G. Donc $P(G)=\dfrac{1}{s_1}\times\dbinom{k}{3}$.

1.2. $P_G\left([D_n=k]\right)=P\left([D_{n-1}=k-2]\right)$ où P_G désigne la probabilité conditionnelle sachant G car, après réindexation, la boule portant l'ancien numéro k est réindexée par l'entier $k-2$.

2. Soit H l'évènement selon lequel $k < a$.

2.1. L'évènement H est réalisé si et seulement si les trois boules tirées figurent parmi les $(2n-k)$ boules numérotées de $(k+1)$ 0 à $2n$. Il y a $\binom{2n-k}{3}$ premières sélections qui réalisent H. $P(H)=\frac{1}{s_1}\times\binom{2n-k}{3}$.Calculer la probabilité $P(H)$ de l'évènement H.

2.2. $P_H([D_n=k])=P([D_{n-1}=k])$ où P_H désigne la probabilité conditionnelle sachant H car, après réindexation, la boule portant l'ancien numéro k est réindexée par le même numéro.

3. Soit I l'évènement selon lequel $a<k<c$.

3.1. Selon le résultat fourni par l'énoncé : $P(I)=\dfrac{k\times n\times(2n-k)}{s_1}$

3.2. $P_I([D_n=k])=P([D_{n-1}=k-1])$ où P_I désigne la probabilité conditionnelle sachant I car après réindexation, la boule portant l'ancien numéro k est réindexée par l'entier $(k-1)$.

4. L'évènement $[D_n=k]$ est la réunion des trois évènements $[D_n=k]\cap G$, $[D_n=k]\cap H$ et $[D_n=k]\cap I$, puisqu'il se réalise si et seulement si la boule k n'est pas éliminée dès la première sélection, c'est-à-dire si et seulement si l'un ou l'autre des trois évènements G, H ou I est réalisé. Ces évènements étant disjoints, la probabilité de l'évènement $[D_n=k]$ est la somme des probabilités des trois intersections.

Or : $P([D_n=k]\cap G)=P(G)\times P_G(D_n=k)$ et de même : $P([D_n=k]\cap H)=P(H)\times P_H(D_n=k)$ ainsi que $P([D_n=k]\cap I)=P(I)\times P_I(D_n=k)$.

Compte tenu des résultats des questions précédentes, on obtient :

$$\binom{2n+1}{3}P(D_n=k)=\binom{2n-k}{3}P([D_{n-1}=k])+k\times n\times(2n-k)P([D_{n-1}=k-1])+\binom{k}{3}P([D_{n-1}=k-2]).$$

5. *Application numérique.*

L'algorithme **loimilieu** construit les distributions de probabilités des variables D_m depuis 2 jusqu'à la valeur n souhaitée. Voici son application pour $n=4$

loimilieu(4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{1}{35} & \frac{4}{25} & \frac{109}{175} & \frac{4}{25} & \frac{1}{35} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & \frac{1}{84} & \frac{8}{147} & \frac{37}{196} & \frac{24}{49} & \frac{37}{196} & \frac{8}{147} & \frac{1}{84} & 0 \end{bmatrix}$$

Terminé

"loimilieu" enregistr. effectué

Define **loimilieu**(n)=
Prgm
Local d,m,k,u
Define $d=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{8}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$
Disp d
For $m,3,n$
© gilbertjulia2021
 $\mathrm{nCr}(2\cdot m+1,3)\rightarrow s$
 $\mathrm{newMat}(2,2\cdot m+1)\rightarrow u$
 For $k,1,2\cdot m+1$
  $k-1\rightarrow u[1,k]$
 EndFor
 $0\rightarrow u[2,1]$
$\frac{1}{s}\rightarrow u[2,2]$
 For $k,2,m$
$\frac{\mathrm{nCr}(2\cdot m-k,3)\cdot d[2,k+1]+k\cdot m\cdot(2\cdot m-k)\cdot d[2,k]+\mathrm{nCr}(k,3)\cdot d[2,k-1]}{s}\rightarrow u[2,k+1]$
 EndFor
© gilbertjulia2021
 For $j,1,m$
  $u[2,j]\rightarrow u[2,2\cdot m+2-j]$
 EndFor
 $u\rightarrow d$
 Disp d
EndFor
EndPrgm

Et pour la route son application jusqu'à $n=7$.

loimilieu(7)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{1}{35} & \frac{4}{25} & \frac{109}{175} & \frac{4}{25} & \frac{1}{35} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & \frac{1}{84} & \frac{8}{147} & \frac{37}{196} & \frac{24}{49} & \frac{37}{196} & \frac{8}{147} & \frac{1}{84} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & \frac{1}{165} & \frac{4}{165} & \frac{37}{495} & \frac{98}{495} & \frac{13}{33} & \frac{98}{495} & \frac{37}{495} & \frac{4}{165} & \frac{1}{165} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & \frac{1}{286} & \frac{20}{1573} & \frac{337}{9438} & \frac{1264}{14157} & \frac{505}{2574} & \frac{4604}{14157} & \frac{505}{2574} & \frac{1264}{14157} & \frac{337}{9438} & \frac{20}{1573} & \frac{1}{286} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & \frac{1}{455} & \frac{44}{5915} & \frac{1263}{65065} & \frac{6532}{143143} & \frac{14145}{143143} & \frac{405448}{2147145} & \frac{84457}{306735} & \frac{405448}{2147145} & \frac{14145}{143143} & \frac{6532}{143143} & \frac{1263}{65065} & \frac{44}{5915} & \frac{1}{455} & 0 \end{bmatrix}$$

Terminé

©gilbertjulia2021

Le même, mais en mode « Approché ». Pour les valeurs 3 et 4, les probabilités obtenues semblent, à première vue, compatibles avec les résultats de la simulation.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & \frac{1}{165} & \frac{4}{165} & \frac{37}{495} & \frac{98}{495} & \frac{13}{33} & \frac{98}{495} & \frac{37}{495} & \frac{4}{165} & \frac{1}{165} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & \frac{1}{286} & \frac{20}{1573} & \frac{337}{9438} & \frac{1264}{14157} & \frac{505}{2574} & \frac{4604}{14157} & \frac{505}{2574} & \frac{1264}{14157} & \frac{337}{9438} & \frac{20}{1573} & \frac{1}{286} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & \frac{1}{455} & \frac{44}{5915} & \frac{1263}{65065} & \frac{6532}{143143} & \frac{14145}{143143} & \frac{405448}{2147145} & \frac{84457}{306735} & \frac{405448}{2147145} & \frac{14145}{143143} & \frac{6532}{143143} & \frac{1263}{65065} & \frac{44}{5915} & \frac{1}{455} & 0 \end{bmatrix}$$

Terminé

©gilbertjulia2021

loimilieu(7)

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ 0. & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \\ 0. & 0.0286 & 0.16 & 0.6229 & 0.16 & 0.0286 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. \\ 0. & 0.0119 & 0.0544 & 0.1888 & 0.4898 & 0.1888 & 0.0544 & 0.0119 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. \\ 0. & 0.0061 & 0.0242 & 0.0747 & 0.198 & 0.3939 & 0.198 & 0.0747 & 0.0242 & 0.0061 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. & 11. & 12. \\ 0. & 0.0035 & 0.0127 & 0.0357 & 0.0893 & 0.1962 & 0.3252 & 0.1962 & 0.0893 & 0.0357 & 0.0127 & 0.0035 & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. & 11. & 12. & 13. & 14. \\ 0. & 0.0022 & 0.0074 & 0.0194 & 0.0456 & 0.0988 & 0.1888 & 0.2753 & 0.1888 & 0.0988 & 0.0456 & 0.0194 & 0.0074 & 0.0022 & 0. \end{bmatrix}$$

Terminé