Concours général 2008 ou le boucher sympa

Voici le sujet d'un exercice posé au concours général en 2008 (exercice 3 de ce sujet). Il est question d'un sympathique boucher qui ne compte pas les centimes lorsqu'il fait payer ses clients. Ce qui pose problème lorsqu'on veut retrouver le prix exact de chaque article.
Faites attention cependant à deux choses :

- *Quel sens accorder à « donner toutes les solutions » dans la question 1 ?*
- *Pour ma part, je ne suis pas tout à fait d'accord avec l'affirmation de la question 2. En tout cas, la question mérite d'être débattue.*

1. Le sujet

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
   - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
   - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

   Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?
2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?

2. Eléments de correction

NB. Dans ce qui suit la fonction E désigne la partie entière.

Désignons par x le prix d'un kilo de côtelettes et par y le prix d'un kilo de rôti.

Le boucher ne compte que la partie entière du prix de chaque article qu'il vend.

Compte tenu que 250 g, 500 g, 750 g représentent respectivement $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ d'un kilo, nous savons que :

$$\begin{cases} E\left(\frac{3}{4}x\right)+E\left(\frac{1}{4}y\right)=18 \\ E\left(\frac{1}{4}x\right)+E\left(\frac{1}{2}y\right)=17 \end{cases}.$$

Sachant que pour tout réel u : $E(u)\leq u < E(u)+1$, nous disposons de l'encadrement : $u-1<E(u)\leq u$.

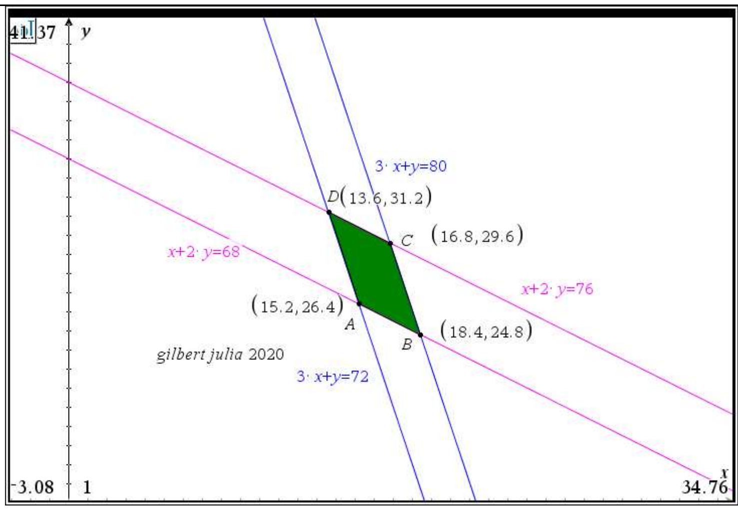
Ainsi : $\begin{cases} \left(\frac{3}{4}x-1\right)+\left(\frac{1}{4}y-1\right)<18\leq\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y \\ \left(\frac{1}{4}x-1\right)+\left(\frac{1}{2}y-1\right)<17\leq\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$ ou mieux : $\begin{cases} 18\leq\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y<20 \\ 17\leq\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y<19 \end{cases}$

Et encore mieux : $\begin{cases} 72\leq 3x+y<80 \\ 68\leq x+2y<76 \end{cases}$

Première méthode : graphique

Nous devons résoudre un système d'inéquations linéaires à deux inconnues.

Voici une résolution graphique de ce système. L'ensemble des solutions est constitué par les couples $(x\ ;\ y)$ situés à l'intérieur du parallélogramme colorié en vert, côtés $[AB[$ et $[AD[$ inclus mais côtés $[CB]$ et $[CD]$ exclus. (ainsi, des quatre sommets, seul le sommet A est inclus).



Deuxième méthode : recherche exhaustive des solutions par un algorithme dans un domaine où nous sommes certains qu'elles y sont toutes.

Il est préférable dans cette méthode de supposer que x et y sont les prix en centimes du kilo de côtelettes et du kilo de rôti. On admet que ces prix sont des nombres entiers de centimes (ce qui paraît légitime, a-t-on vu des côtelettes vendues $\frac{47}{13}$ euros ou 5π euros le kilo ?)

Les inégalités auxquelles nous aboutissons sont dans cette méthode : $\begin{cases} 7200 \leq 3x + y < 8000 \\ 6800 \leq x + 2y < 7600 \end{cases}$

De ces inégalités nous déduisons (ce sont des implications simples) :

- D'une part : $\begin{cases} 14400 \leq 6x + 2y < 16000 \\ -7600 < -x - 2y \leq -6800 \end{cases}$ puis par addition et division par 5 : $1360 < x < 1840$
- D'autre part : $\begin{cases} -8000 < -3x - y \leq -7200 \\ 20400 \leq 3x + 6y < 22800 \end{cases}$ puis par addition et division par 5 : $2480 < y < 3120$

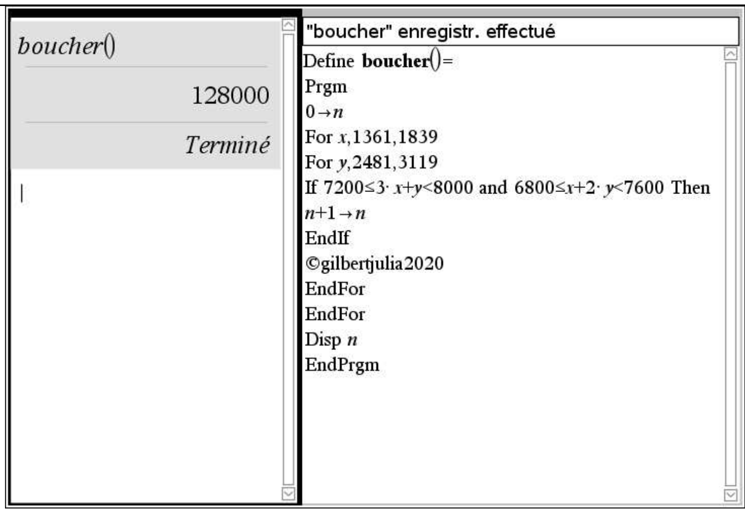
Tous les couples solutions appartiennent nécessairement au rectangle ouvert $]1360\,;1840[\times]2480\,;3120[$

On retrouve, multipliées par 100, les valeurs extrémales remarquables de la solution graphique. Cependant, nous n'avons que des conditions nécessaires. Un couple étant choisi dans ce rectangle ouvert, rien ne garantit qu'il soit solution.

Nous allons nous proposer de déterminer exhaustivement le nombre de solutions (on ne pourra pas les afficher toutes …) à l'aide d'un algorithme.

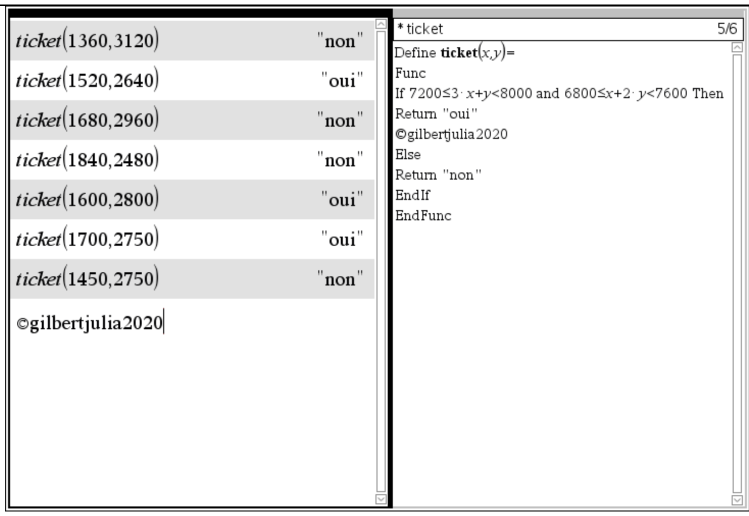
Le programme **boucher** dénombre les solutions et en trouve 128000, il serait clairement illusoire de prétendre « donner toutes les solutions » in extenso.

Je laisse aux fans de Python la joie et le privilège d'écrire un algorithme en Python faisant aussi bien ou peut-être mieux.

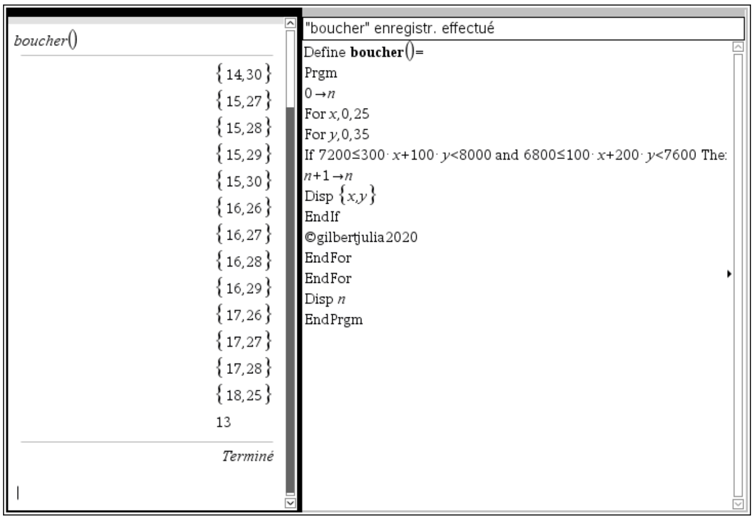


La fonction **ticket** indique si un couple de prix (x, y) de côtelettes et rôti est compatible ou ne l'est pas avec les montants indiqués sur les tickets ramassés.

On vérifie entre autres que, parmi les coordonnées des quatre sommets du parallélogramme obtenu graphiquement, seules les coordonnées du point A sont compatibles. On vérifie aussi que, étant donné un couple du rectangle $]1360\,;1840[\times]2480\,;3120[$, tantôt il est compatible, tantôt il ne l'est pas.



Si nous avions voulu chercher des prix qui étaient des *nombres entiers* d'euros, la situation aurait été différente. Nous aurions pu majorer x et y « à la louche » (par exemple par 25 et 35) et nous aurions testé tous les couples d'entiers du domaine $[0\,;25]\times[0\,;35]$. Nous pouvons nous payer le luxe d'afficher toutes les solutions, elles sont peu nombreuses. Ci-contre, la programme **boucher** a été modifié dans ce sens. Nous trouvons 13 couples solutions constitués de deux prix qui sont des nombres entiers d'euros. Ce qui est plausible puisque précédemment nous avons dénombré environ 10000 fois plus de couples constitués de nombres entiers de centimes.



2. Il me semble que tout dépend de l'ensemble dans lequel les prix des divers articles sont choisis.

Si on suppose que ces prix sont des *nombres réels* quelconques, ou même des *nombres décimaux* quelconques alors il est clair que, le nombre de tickets recueillis étant en nombre fini, il ne sera pas possible de déterminer tous les prix. Si le boucher vend k articles différents, et si on dispose de n tickets, aussi grand soit ce nombre, l'ensemble des prix possibles constitue un sous-ensemble ouvert convexe (intersection de n strates ouvertes d'espace limitées par deux hyperplans parallèles) de $\mathbf{R}^k$, non vide puisque les n tickets correspondent tous à des commandes réalisables, et contenant donc une infinité de k-uplets.

En revanche, si on suppose que ces prix sont des *nombres entiers de centimes* quelconques, alors il y un nombre fini de possibilités et on peut imaginer que, si on dispose d'un assez grand nombre de tickets, le sous-ensemble ouvert convexe ci-dessus ne contienne qu'un seul couple constitué de deux nombres entiers de centimes.

Par exemple, imaginons que le boucher ne vende que des côtelettes.

Imaginons qu'un ticket nous indique : 100 kg de côtelettes :1480 euros (encore un qui fait du stock dans son congélo…). Cela signifie que le prix x en centimes d'euros d'un kilo de côtelettes est tel que $1480 \leq x < 1481$. Le prix x appartient à un *intervalle* qui contient une infinité de nombres décimaux mais qui contient un seul nombre entier. Si le prix est un nombre entier de centimes le seul prix possible est 1480 centimes.