# Correction Problème "courbes de Bézier de degré 2"

## Partie 1. Paraboles et courbes polynomiales de degré 2.

1.1. Pour tout point $M$ de P, $\overrightarrow{AM(t)}$ est combinaison linéaire des vecteurs indépendants $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Tout point de P est dans le plan ($A$, $\vec{v}$, $\vec{w}$), la parabole P est incluse dans ce plan.

1.2. Le vecteur dérivé en un point $M$ est le vecteur : $\vec{D} = \vec{v} + 2t.\vec{w}$. Ce vecteur est orthogonal à $\vec{w}$ si et seulement si : $\vec{v}.\vec{w} + 2t\|\vec{w}\|^2 = 0$ ce qui donne, puisque $\vec{w}$ est un vecteur non nul, une unique valeur de $t$ possible : $t = -\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{2\|\vec{w}\|^2}$. Il existe donc un unique point $S$ où la tangente a la direction orthogonale à $\vec{w}$. Ce point est défini par : $S = A - \left(\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{2\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{v} + \left(\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{2\|\vec{w}\|^2}\right)^2 \vec{w}$

1.3. De façon générale, si on considère deux points de P, associés à deux valeurs $t$ et $t$' du paramètre : $\overrightarrow{M(t)M(t')} = (t'-t)\vec{v} + (t'^2 - t^2)\vec{w} = (t'-t)(\vec{v} + (t+t')\vec{w})$
Quant au milieu $I$ du segment $[M(t)M(t')]$, il est défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AI(t)} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM(t)} + \overrightarrow{AM(t')}\right) = \frac{1}{2}\left((t+t')\vec{v} + (t^2 + t'^2)\vec{w}\right)$

Notons $s$ la valeur de $t$ associée au point $S$ : $s = -\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{2\|\vec{w}\|^2}$ et $\Delta$ la droite passant par $A$ de vecteur directeur $\vec{w}$.

Le point $S$ est ainsi le point $S = A + s\vec{v} + s^2\vec{w}$. Considérons alors deux points de P, de paramètres respectifs $t = s - h$ et $t' = s + h$ où $h$ est un réel non nul.
Avec ces notations : $\overrightarrow{M(t)M(t')} = 2h(\vec{v} + s\vec{w})$. La droite ($MM'$) a pour vecteur directeur le vecteur $(\vec{v} + s\vec{w})$. Compte tenu de la définition de $s$, il s'agit d'un vecteur orthogonal à $\vec{w}$. Donc la droite ($MM'$) est perpendiculaire à $\Delta$.
D'autre part, le milieu $I$ de $[M(t)M(t')]$ est défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AI(t)} = s\vec{v} + (s^2 + h^2)\vec{w}$, relation équivalente à : $\overrightarrow{SI(t)} = (h^2)\vec{w}$. Donc, $I$ est sur $\Delta$, droite qui apparaît comme la médiatrice de $[M(t)M(t')]$ quel que soit $h \neq 0$. $\Delta$ est axe de symétrie de P.

## Partie 2. Courbe de Bézier de degré 2 (à trois points de contrôle).

2.0. Compte tenu des définitions barycentriques des divers points en jeu :
$\overrightarrow{A_1B_1(t)} = t\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2(t)} = t\overrightarrow{A_2A_3}$ et $\overrightarrow{B_1(t)M(t)} = t\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}$. Le points $B_1$ est l'homothétique de $A_2$ par l'homothétie de centre $A_1$ et de rapport $t$, $B_2$ celui de $A_3$ par l'homothétie de centre $A_2$ et de rapport $t$ et $M$ celui de $B_2$ par l'homothétie de centre $B_1$ et de rapport $t$.

2.1. Compte tenu de ces mêmes définitions barycentriques :

$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)\overrightarrow{OB_1(t)} + t\,\overrightarrow{OB_2(t)}$. Or : $\overrightarrow{OB_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\,\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OB_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{OA_2} + t\,\overrightarrow{OA_3}$
La substitution de ces deux dernières expressions dans celle de $\overrightarrow{OM(t)}$ donne la relation voulue.

*Rem :* Il est possible de positionner le point $M(t)$ par rapport au point $A_1$ : $\overrightarrow{A_1M(t)} = 2t(1-t).\overrightarrow{A_1A_2} + t^2\,\overrightarrow{A_1A_3}$ ou bien aussi : $\overrightarrow{A_1M(t)} = 2t.\overrightarrow{A_1A_2} + t^2\left(\overrightarrow{A_1A_3} - 2\overrightarrow{A_1A_2}\right) = 2t.\overrightarrow{A_1A_2} + t^2\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right)$

2.2. Le développement de l'expression : $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OA_1} + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_2} + t^2\overrightarrow{OA_3}$ donne : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OA_1} + 2t\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right) + t^2\left(\overrightarrow{OA_1} - 2\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)$ soit : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OA_1} + 2t\,\overrightarrow{A_1A_2} + t^2\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right)$.
On reconnaît une définition parabolique avec $A = A_1$ ; $\vec{v} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$ ; $\vec{w} = \left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right)$
Cette courbe est une parabole si et seulement si les vecteurs : $\vec{v} = 2.\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}$ sont des vecteurs indépendants, donc si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_2A_3}$ le sont. Ce qui revient à dire que $A_1$, $A_2$, $A_3$ ne sont pas alignés.

2.3. Les points $A_1$ et $A_3$ correspondent aux valeurs zéro et 1 du paramètre. Ce sont respectivement les points $M(0)$ et $M(1)$. Lorsque $t = \frac{1}{2}$, $B_1$ et $B_2$ sont les milieux respectifs de [$A_2A_1$] et de [$A_2A_3$] et $M$ est le milieu de [$B_1B_2$]. De ce fait : $\overrightarrow{A_2M\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_2B_1\left(\frac{1}{2}\right)} + \overrightarrow{A_2B_2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A'_2}$ ce qui positionne $M\left(\frac{1}{2}\right)$ au milieu de $A_2$ et $A'_2$.

2.4. $\overrightarrow{OM(1-t)} = t^2\overrightarrow{OA_1} + 2(1-t)t\overrightarrow{OA_2} + (1-t)^2\overrightarrow{OA_3}$ . Par différence : $\overrightarrow{M(t)M(1-t)} = \overrightarrow{OM(1-t)} - \overrightarrow{OM(t)}$
Ce qui donne : $\overrightarrow{M(t)M(1-t)} = (1-2t)\left(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}\right) = (1-2t)\overrightarrow{A_1A_3}$ et prouve la colinéarité de l'énoncé.

Le milieu $I$ du segment $[M(t)M(1-t)]$ est quant à lui défini par : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM(1-t)} + \overrightarrow{OM(t)}\right)$.

On obtient : $\overrightarrow{OI} = \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\right) + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_2}$ . Si on positionne ce point par rapport à $A_2$ à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{A_2I} = \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right) = \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\left(2\overrightarrow{A_2A'_2}\right)$
Ce milieu est sur la droite ($A_2A'_2$). Les deux points de paramètres $t$ et $1 - t$ se correspondent par une symétrie (oblique) d'axe ($A_2A'_2$) et de direction celle de $\overrightarrow{A_1A_3}$

2.5. Le calcul du vecteur dérivé donne : $\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = 2\left((t-1)\overrightarrow{OA_1} + (1-2t)\overrightarrow{OA_2} + t\overrightarrow{OA_3}\right)$. Ce qui peut s'écrire :
$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = -2\left((1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}\right) + 2\left((1-t)\overrightarrow{OA_2} + t\overrightarrow{OA_3}\right) = -2\overrightarrow{OB_1(t)} + 2\overrightarrow{OB_2(t)} = 2\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}$$
La tangente en $M(t)$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}$. Le point $M(t)$ appartenant à la droite $(B_1(t)\ B_2(t))$, cette droite représente la tangente à $\Gamma$ en $M(t)$.
On peut noter que d'après la relation vectorielle : $\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)} = \overrightarrow{A_1A_2} + t\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}\right)$ facile à établir, si $A_1$, $A_2$ et $A_3$ ne sont pas alignés, les points $B_1$ et $B_2$ sont toujours distincts.
Pour $t$ = 0, on obtient : $2\overrightarrow{B_1(0)B_2(0)} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$ , la tangente en $A_1$ à $\Gamma$ est la droite ($A_1A_2$).
Pour $t$ = 1, on obtient : $2\overrightarrow{B_1(1)B_2(1)} = 2\overrightarrow{A_2A_3}$ , la tangente en $A_3$ à $\Gamma$ est la droite ($A_2A_3$).

Lorsque $t=\frac{1}{2}$, $B_1$ et $B_2$ sont les milieux respectifs de $[A_2A_1]$ et de $[A_2A_3]$. Le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $[B_1B_2]$. La tangente $(B_1B_2)$ en ce point est la droite passant par les milieux des segments $[A_2A_1]$ et $[A_2A_3]$.

## Partie 3. Raccordement, courbe de Bézier de degré 2 associée à une ligne polygonale.

3.1. Lorsque $t$ appartient à l'intervalle [0 ; 1[, sa partie entière est nulle et on obtient l'application :
$t\in[0\,;\,1]\mapsto \overrightarrow{OM(t)}=(1-t)^2\overrightarrow{OA_1}+2t(1-t)\overrightarrow{OA_2}+t^2\overrightarrow{OA_3}$ conforme à ce qui a été obtenu dans la partie 2 pour construire l'arc de parabole contrôlé par $(A_1, A_2, A_3)$d'extrémités $A_1$ et $A_3$. En l'occurrence, il s'agit de l'arc de parabole $P_1$.
Plus généralement, supposons que $k$ soit un entier tel que $0\le k-1<n$ et soit $t$ appartenant à l'intervalle$[k-1\,;\,k[$. Le nombre $k-1$ représente la partie entière de $t$ et si l'on effectue le changement de variable $s=t-e(t)$, on obtient l'application :
$s\in[0\,;\,1[\mapsto \overrightarrow{OM(s)}=(1-s)^2\overrightarrow{OA_{2k-1}}+2s(1-s)\overrightarrow{OA_{2k}}+s^2\overrightarrow{OA_{2k+1}}$. Cette définition est conforme à ce qui a été obtenu dans la partie 2 pour construire l'arc de parabole contrôlé par $(A_{2k-1}, A_{2k}, A_{2k+1})$ d'extrémités $A_{2k-1}$ et $A_{2k+1}$. En l'occurrence, il s'agit de l'arc de parabole $P_k$.
Au final, on obtient $\Gamma$, avec l'extrémité $A_{2n+1}$ compte tenu du prolongement convenu.

3.2. La fonction ainsi définie est de classe $C^\infty$ à l'intérieur de chaque intervalle entier.
En un point entier $k$ tel que : $0\le k<n$, par construction, $\overrightarrow{OM(k)}=\overrightarrow{OA_{2k+1}}$ puisque $t$ coïncide avec sa partie entière. En outre, $\overrightarrow{OM(n)}=\overrightarrow{OA_{2n+1}}$
Elle sera de classe $C^1$ si à chaque raccordement en un entier $k$ tel que : $0<k<n$ on a en même temps
$\lim\limits_{t\to k-}\overrightarrow{OM}(t)=\lim\limits_{t\to k+}\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OM}(k)$ (pour être de classe $C^0$) et : $\lim\limits_{t\to k-}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)=\lim\limits_{t\to k+}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$.
La fonction partie entière étant continue à droite, le problème de continuité ne se pose qu'à gauche.

Or : $\lim\limits_{t\mapsto k-}\overrightarrow{OM(t)}=\lim\limits_{s\mapsto 1-}\overrightarrow{OM(s)}=(1-s)^2\overrightarrow{OA_{2k-1}}+2s(1-s)\overrightarrow{OA_{2k}}+s^2\overrightarrow{OA_{2k+1}}=\overrightarrow{OA_{2k+1}}$
Le raccordement est toujours continu.

Si l'on dérive à l'intérieur d'un intervalle entier la relation vectorielle de définition, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}=2(t-e(t)-1)\overrightarrow{OA_{2e(t)+1}}+2(2e(t)+1-2t)\overrightarrow{OA_{2e(t)+2}}+2(t-e(t))\overrightarrow{OA_{2e(t)+3}}.$$

Cette fonction vectorielle est de plus dérivable à droite pour tout entier compris entre 1 et $n-1$, avec
$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(k_+)=-2\overrightarrow{OA_{2k+1}}+2\overrightarrow{OA_{2k+2}}=2\overrightarrow{A_{2k+1}A_{2k+2}}$.
Sur l'intervalle $]k-1, k[$ , la partie entière de $t$ est $k-1$ :

$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}=2(t-k)\overrightarrow{OA_{2k-1}}+2(2k-1-2t)\overrightarrow{OA_{2k}}+2(t-k+1)\overrightarrow{OA_{2k+1}}:$$

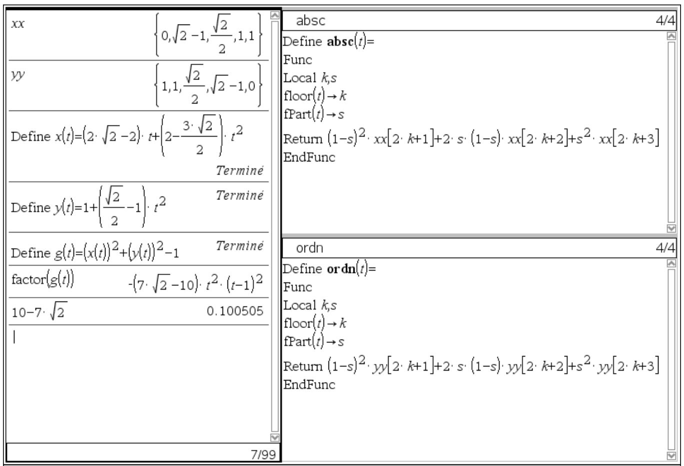
Par suite : $\lim\limits_{t\to k-}\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}=-2\overrightarrow{OA_{2k}}+2\overrightarrow{OA_{2k+1}}=2\overrightarrow{A_{2k}A_{2k+1}}$.

Le raccordement est de classe C[1] si et seulement si cette limite est égale au vecteur dérivé à droite, c'est-à-dire si et seulement si $2\overrightarrow{A_{2k}A_{2k+1}} = 2\overrightarrow{A_{2k+1}A_{2k+2}}$ ce qui revient à dire que $A_{2k+1}$ doit être le milieu du segment $[A_{2k}\ A_{2k+2}]$ .

(Mais la courbe $\Gamma$ peut avoir une tangente en son point $A_{2k+1}$ sans que pour autant la fonction vectorielle soit de classe C[1]. C'est le cas lorsque les points $A_{2k}, A_{2k+1}, A_{2k+2}$ sont alignés dans cet ordre. Si on considère le point $M$ ($t$) comme un point mobile, il subit alors au passage une discontinuité de vitesse mais pas un changement instantané de direction).

Les abscisses et les ordonnées des points de contrôle sont listés en listes **xx** et **yy** respectivement (partie gauche de l'écran, on a choisi les coordonnées des cinq points de contrôle de la question 3.4).

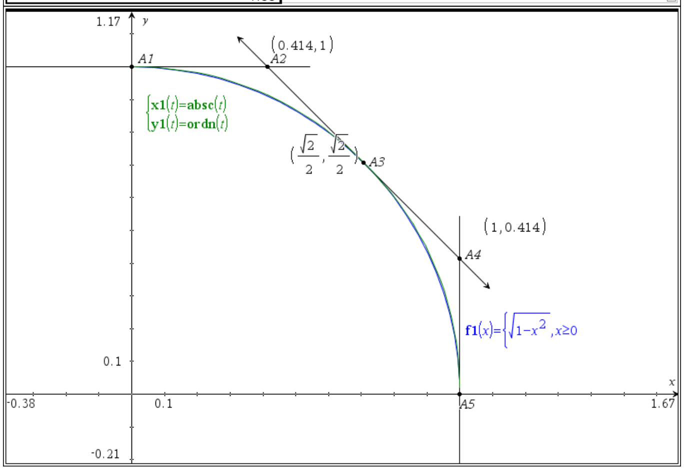
Sur la partie droite de l'écran, on a défini les fonctions coordonnées **absc** et **ordn**, permettant de construire la fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ déterminée par les points de contrôle dont on a listé les coordonnées.




La courbe de Bézier ainsi générée est représentée en tant que courbe paramétrée.

L'écran ci-contre présente l'arc de cercle, les cinq points de contrôle et, presque superposée au quart de cercle, la courbe de Bézier $\Gamma$ obtenue par raccordement de deux arcs de parabole.

Le point $A_3$ étant le milieu de $[A_2A_4]$, la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ définie sur $[0\ ;\ 2]$ et raccordée en 1 est dérivable en 1.




3.4. Les tangentes en $A_1$ et en $A_3$ à $\Gamma$ ont pour équations respectives : $y - 1 = 0$ et $x + y - \sqrt{2} = 0$. Elles se coupent en $A_2$ de coordonnées ($\sqrt{2}$ - 1; 1).

Pour l'arc $A_1A_2A_3$, on obtient le paramétrage : $\boxed{\begin{cases} x = (2\sqrt{2}-2).t + (2-3\sqrt{2}/2)t^2 \\ y = 1 + (\sqrt{2}/2 - 1)t^2 \end{cases}}$ avec $t$ appartenant à [0, 1]:

Le calcul de $x^2 + y^2 - 1$ et la fonction factor de la calculatrice donne : (10 - 7$\sqrt{2}$ ) pour le coefficient $k$, coefficient qui est compris entre 0,10 et 0,11.

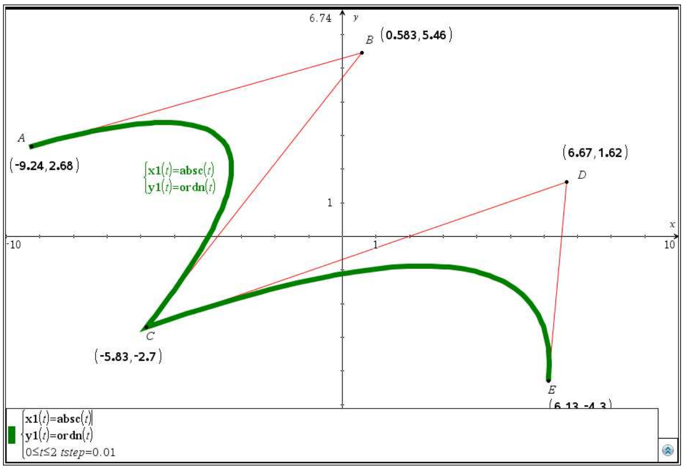
Le maximum de distance à U sur cet arc est obtenu lorsque $t$ rend maximal $t^2(1-t^2)$ c'est à dire pour $t$ = 1/2.

Cette distance est alors $\dfrac{\sqrt{26-7\sqrt{2}}}{4} - 1$ qui est comprise entre 0,0031 et 0,0032.

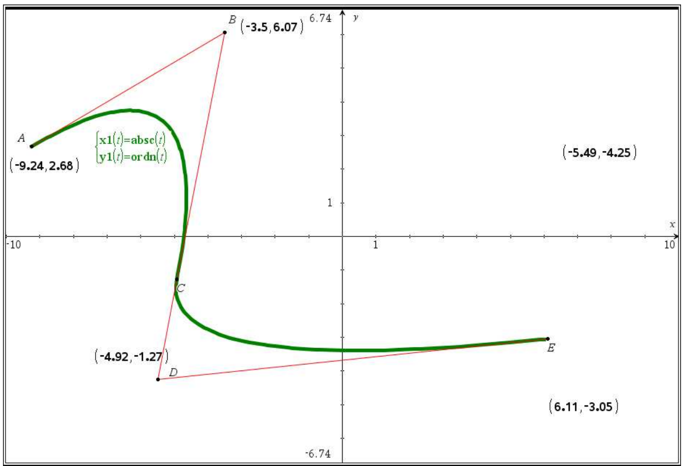
L'arc $A_3A_4A_5$ se déduit du précédent par réflexion d'axe la première bissectrice du repère (les arcs de paraboles se transforment l'un en l'autre). Le maximum de distance à U est le même pour cet arc que pour l'arc précédent.

## Complément

Dans une page **Graphiques**, on a créé cinq points notés *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dont les coordonnées ont été stockées dans diverses variables. Puis les cinq abscisses ont été listées en liste **xx** et les cinq ordonnées en liste **yy**. La fonction vectorielle $t \in [0\ ;\ 2] \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ déterminée par ces cinq points de contrôle a été représentée.
*C* est le point $M(1)$.
En déplaçant l'un ou l'autre des cinq points, on déforme la courbe $\Gamma$ représentative de la fonction vectorielle. Dans le cas présent, on observe deux demi tangentes à $\Gamma$ en *C*. La fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ n'est pas dérivable en 1.




Dans ce cas, les points *B*, *C*, *D* sont alignés dans cet ordre mais *C* n'est pas le milieu de [*BD*]. La courbe $\Gamma$ présente une tangente en *C* bien que la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ ne soit pas dérivable en 1.




Dans ce cas, les points *B*, *D*, *C* sont alignés dans cet ordre. La courbe $\Gamma$ présente en *C* un point de rebroussement.