Courbes de Bézier

Le thème « Courbes de Bézier » est devenu le sujet d'une leçon de CAPES.
Je vous livre mon point de vue sur ce thème.

Courbes de Bézier de degré 2 (à trois points de contrôle), quelques rappels.

Ce sujet fait l'objet d'un problème à part, c'est pourquoi je ne le développe pas.
Pour définir une telle courbe, on se donne trois points A_1, A_2, A_3 distincts de E_3.
Pour tout réel t on définit successivement les points suivants :

- B_1 (t) barycentre des points A_1 et A_2 affectés des coefficients (1- t) et t.
- B_2 (t) barycentre des points A_2 et A_3 affectés des coefficients (1 - t) et t.
- M (t) barycentre des points B_1 (t) et B_2 (t) affectés des coefficients (1 - t) et t.

On considère alors la courbe P décrite par le point M (t) lorsque t décrit **R**

Rappel 1. $\overrightarrow{A_1B_1(t)} = t\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2(t)} = t\overrightarrow{A_2A_3}$ et $\overrightarrow{B_1(t)M(t)} = t\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}$. Le point B_1 est l'homothétique de A_2 par l'homothétie de centre A_1 et de rapport t, B_2 celui de A_3 par l'homothétie de centre A_2 et de rapport t et M celui de B_2 par l'homothétie de centre B_1 et de rapport t.

Rappel 2. On dispose de la relation : $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OA_1} + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_2} + t^2\overrightarrow{OA_3}$ pour tout réel t.

Rappel 3. Si les trois points A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, cette courbe est une parabole passant par les points A_1 et A_3, points qui correspondent aux valeurs 0 et 1 du paramètre.

Rappel 4. Le vecteur dérivé en t est : $\dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = 2\left((t-1)\overrightarrow{OA_1} + (1-2t)\overrightarrow{OA_2} + t\overrightarrow{OA_3}\right) = 2\overrightarrow{B_1(t)B_2(t)}$. Il en résulte qu'au point M (t), la tangente est la droite $\left(B_1(t)\ B_2(t)\right)$. En particulier, la tangente en A_1 et celle en A_3 passent par A_2.

Courbes de Bézier de degré 3 (à quatre points de contrôle) : Définition, propriétés éparses.

Pour définir une telle courbe, on se donne quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 distincts de E_3.
Pour tout réel t on définit successivement les points suivants :

- B_1 (t) barycentre des points A_1 et A_2 affectés des coefficients (1- t) et t.
- B_2 (t) barycentre des points A_2 et A_3 affectés des coefficients (1 - t) et t.
- B_3 (t) barycentre des points A_3 et A_4 affectés des coefficients (1 - t) et t.
- C_1 (t) barycentre des points B_1 (t) et B_2 (t) affectés des coefficients (1 - t) et t.
- C_2 (t) barycentre des points B_2 (t) et B_3 (t) affectés des coefficients (1 - t) et t.
- M (t) barycentre des points C_1 (t) et C_2 (t) affectés des coefficients (1 - t) et t.

On considère alors la courbe Γ décrite par le point M (t) lorsque t décrit **R**

Il résulte de la définition que le point C_1 (t) décrit la courbe de Bézier quadratique déterminée par les trois points A_1, A_2, A_3 tandis que le point C_2 (t) décrit la courbe de Bézier quadratique déterminée par les trois points A_2, A_3, A_4. On peut donc appliquer à l'étude de ces points tous les résultats concernant le paragraphe précédent.

D'abord dans le calcul de : $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)\overrightarrow{OC_1(t)} + t\overrightarrow{OC_2(t)}$

En effet, $\overrightarrow{OC_1(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OA_1} + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_2} + t^2\overrightarrow{OA_3}$ et $\overrightarrow{OC_2(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OA_2} + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_3} + t^2\overrightarrow{OA_4}$ en vertu du paragraphe précédent.

On obtient : $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^3\overrightarrow{OA_1} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OA_2} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OA_3} + t^3\overrightarrow{OA_4}$

Les coefficients polynômiaux obtenus sont les polynômes de Bernstein de troisième génération (degré 3).

On note au passage que le point $M(0)$ est le point A_1 et le point $M(1)$ est le point A_4.

Ensuite dans le calcul de $\dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$:

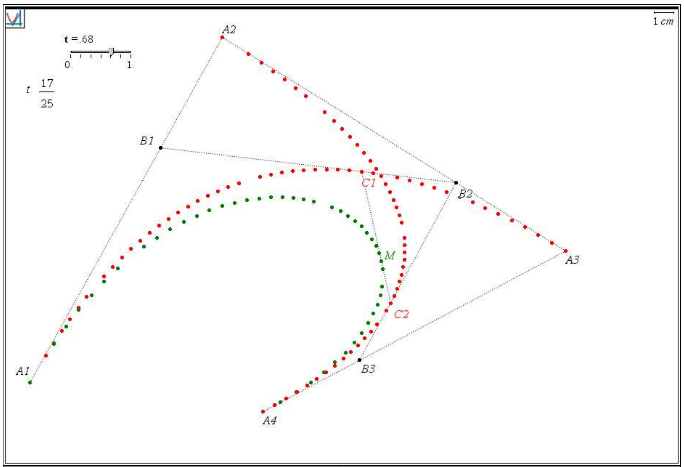
$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = -3(1-t)^2\overrightarrow{OA_1} + \left(3(1-t)^2 - 6t(1-t)\right)\overrightarrow{OA_2} + \left(6t(1-t) - 3t^2\right)\overrightarrow{OA_3} + 3t^2\overrightarrow{OA_4}$$

On reconnaît : $\dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = 3\overrightarrow{OC_2(t)} - 3\overrightarrow{OC_1(t)} = 3\overrightarrow{C_1(t)C_2(t)}$

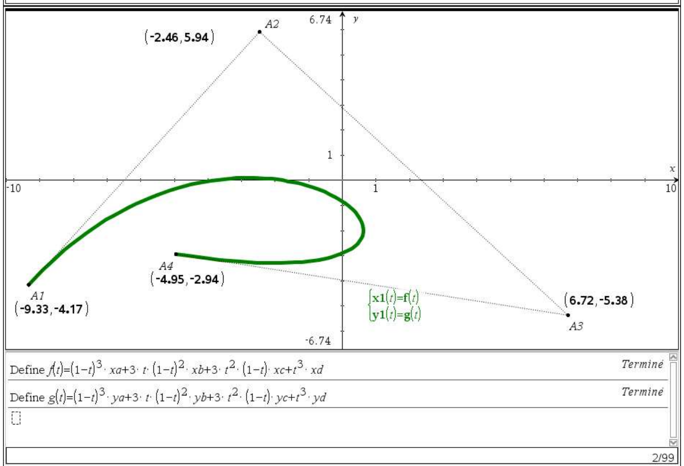
Ce qui établit que, pourvu que les points C_1 et C_2 soient distincts, la droite (C_1C_2) est la tangente en M à Γ. En particulier, la tangente en A_1 est la droite (A_1A_2) et la tangente en A_4 est la droite (A_4A_3).

Figure et graphique

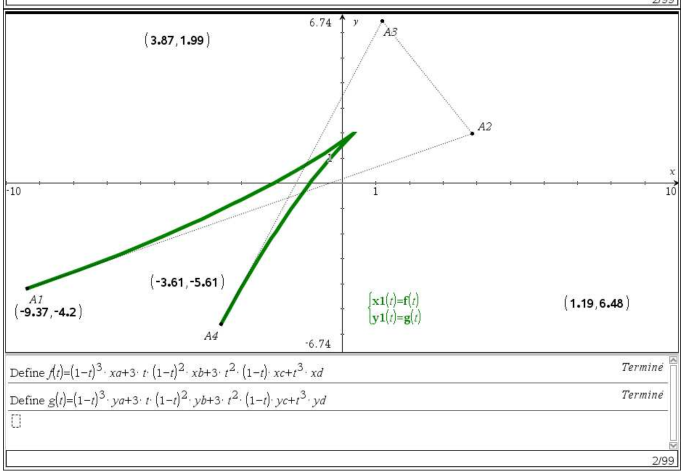
On utilise l'application **Géométrie.**
Les points utiles, jusqu'au point $M(t)$, peuvent être construits à l'aide d'homothéties dont le rapport dépend d'un curseur. L'activation de la **Trace géométrique** permet de donner une idée des courbes décrites par les points $C_1(t)$, $C_2(t)$ et $M(t)$ lorsqu'on actionne le curseur.



Un autre point de vue consiste à utiliser l'application **Graphiques**. Les coordonnées des quatre points de contrôle sont stockées dans les variables **xa**, **ya**, ... , , **xd**, **yd**.
La courbe Γ est construite en tant que courbe paramétrée (on a construit uniquement l'arc obtenu quand le paramètre varie de 0 à 1).
On utilise l'application **Calculs** pour définir les deux fonctions coordonnées déterminant la courbe paramétrée.



En agissant sur les points de contrôle, on peut explorer diverses formes de Γ.
On a représenté ici uniquement l'arc correspondant à $t \in [0\ ;\ 1]$.



Conclusion.

Pour construire une leçon sur le thème « courbes de Bézier », peut-être convient-il d'étudier dans un premier temps les courbes de Bézier quadratiques à trois points de contrôle (voir problème et rappels) et dans un deuxième temps de passer au cas des courbes de Bézier cubiques à quatre points de contrôle. On s'appuie dans ce cas sur le fait que les points de deuxième génération (les points C) décrivent des courbes de Bézier quadratiques.
On termine par une illustration graphique sur ordinateur.
Au lecteur-candidat d'en juger.