Bac Terminale C Aix-Marseille 1981 : une infinité de nombres premiers

Le sujet Aix Marseille terminale C 1981 s'est distingué à l'époque pour être l'un des sujets les plus consistants de l'Histoire de la filière C.

Le problème portait sur le calcul de la somme des inverses des carrés, il est proposé par ailleurs sur la même page « écrit du CAPES » (problème de Bâle).

Voici l'un des deux exercices accompagnant le problème, proposant une démonstration d'un résultat classique sur l'infinité des nombres premiers. Ce même thème pourrait être repris de nos jours, il n'a pas vieilli d'une ride.

Tout au plus pourrait-on, face à une classe de terminale actuelle, rechercher à l'aide d'un algorithme un plus grand nombre d'éléments de E au lieu de se contenter de deux éléments et lancer la recherche sous la forme : « on constate qu'il y a « beaucoup » de nombres premiers appartenant à E, mais que signifie « beaucoup » dans ce contexte ? Peut-on préciser ? »

1. Le sujet

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de **N***(ensemble des entiers naturels non nuls).

1. Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de **N***.
Montrer que E a au moins deux éléments.

2. On suppose E fini. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X = 4P-1$

2.1. Trouver un minorant de X.

2.2. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$, où n est un élément de **N***.

2.3. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$, où n est un élément de **N***.

3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X = 4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

2. Eléments de correction

1. E contient 3 et 7.

2.1. On suppose E fini. Sous cette hypothèse, puisque E contient 3 et 7, le produit de tous les éléments de E est un multiple de 21. Il existe un entier strictement positif k : $P = 21k$ et dans ce cas : $X = 4\times(21k)-1 = 84k-1$. Un minorant de X est par conséquent 83.

2.2. X est un produit d'entiers impairs, c'est un entier impair. Le nombre premier 2 n'est pas l'un de ses facteurs premiers. Ses facteurs premiers sont tous des nombres premiers impairs, donc des nombres premiers de la forme $2k+1$ où k est un élément de **N***.

Soit p un tel facteur premier, $p = 2k+1$.

- Si k est pair, $k = 2n$ où n est un élément de **N***, alors $p = 4n+1$
- Si k est impair, $k = 2n-1$ où n est un élément de **N***, alors $p = 2(2n-1)+1 = 4n-1$

Tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$, où n est un élément de **N***. C'est-à-dire qu'un tel facteur premier est congru soit à $+1$ soit à -1 modulo 4.

2.3. Un produit de facteurs premiers tous de la forme de la forme $4n+1$ est congru à $+1$ modulo 4.
Or, vu que $X = 4P-1$, $X \equiv -1 \ (4)$. Par conséquent, la décomposition en produit de facteurs premiers de X contient nécessairement un nombre impair de facteurs premiers de la forme $4n-1$, en tout cas au moins un.

3. Soit un facteur premier p de X de la forme $4n-1$. Il existe un entier q tel que : $X = pq$.
Compte tenu de la relation $X = 4P-1$, on peut écrire : $4P - pq = 1$.
Les entiers P et p vérifiant la relation de Bézout, ils sont premiers entre eux.

D'autre part, le facteur premier p étant de la forme $4n-1$, il est censé appartenir à E. L'entier P étant le produit de tous les éléments de E, p figure parmi les diviseurs de P.
On à donc trouvé un entier p strictement plus grand que 2 qui, en même temps, est premier avec P et divise P. Ce qui est contradictoire.
L'hypothèse « E fini » doit être abandonnée.

3. Un peu plus loin (une vision « actualisée » de la situation)

Le programme **quatrennemoinsun** répertorie en liste **l** les éléments de E qui sont inférieurs ou égaux à l'entier $4n-1$, où n est un entier donné. Il calcule ensuite le produit de ces éléments puis le nombre X introduit dans l'exercice.

Pour $n = 25$, ce programme distingue le facteur premier 10378271, qui est un élément de E supérieur à tous les éléments de la liste **l** mais de la même forme qu'eux.

Pour $n = 50$, c'est le facteur premier 888214845056039 qui est ainsi distingué, après un temps d'attente non négligeable avant que la factorisation de X ne sorte.