Bac Terminale C Aix-Marseille 1981 : le problème de Bâle

L'objet du problème est de déterminer la somme de la série des inverses des carrés, couronnement du problème, somme obtenue après quelques péripéties picaresques.

La recherche de la valeur exacte de cette somme est connue sous le nom de « problème de Bâle », lieu de naissance de Jacques Bernoulli et de Léonhard Euler qui s'intéressèrent l'un et l'autre à cette recherche aux XVIIème et XVIIIème siècle respectivement.

On pourra comparer le niveau de ce sujet avec celui des sujets posés lors des récentes sessions du CAPES.

1. Le sujet

A. Une suite majorée (résultat de Bernoulli)

On considère les suites u et v définies sur **N*** par $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \ ; \qquad v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\times n}$$

1. Trouver deux réels A et B tels que pour tout entier $n \geq 2$: $\dfrac{1}{(n-1)\times n} = \dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{n}$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$

2. Montrer que la suite u est croissante, que pour tout n élément de **N*** : $u_n \leq v_n$ et que la suite u est majorée.

B. Une affaire de fonctions trigonométriques et d'intégrales

On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un entier naturel :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Soit t un élément de l'intervalle $[0,\ \pi]$.

On pose pour tout entier $n \geq 2$: $C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\,t$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\,t$

1.1. Calculer le nombre complexe $C_n(t) + i\,S_n(t)$.

En déduire que si t est un élément de $]0,\ \pi]$: $C_n(t) = \dfrac{\sin\frac{n\,t}{2}.\cos\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ et si $t = 0$, $C_n(0) = n$.

1.2. L'application C_n de $[0,\ \pi]$ dans **R** est-elle continue sur $[0,\ \pi]$?

2. Vérifier que pour tout t élément de $]0,\ \pi]$: $1+2C_n(t)=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ et montrer que l'application de $]0,\ \pi]$ dans $\mathbf{R}$ qui à t associe $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une application g_n continue sur $[0,\ \pi]$.

3. Montrer que pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$: $\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\ dt=\frac{1}{n^2}$.

En déduire que $u_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\ dt$.

4. Vérifier que $\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt=\frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$ **:** $\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\ dt$

C. Une limite déterminée par Euler en 1735

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,\ \pi]$ par $f(0)=2$ et pour tout t élément de $]0,\ \pi]$ par

$$f(t)=\frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,\ \pi]$; en déduire l'existence d'un réel M tel que pour tout t élément de $[0,\ \pi]$: $0\le f(t)\le M$

2. Soit α un réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

2.1. Montrer que pour tout entier naturel n : $\left|\int_0^\alpha f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\ dt\right|\le\alpha M$

2.2. Montrer que f est dérivable sur $[\alpha,\ \pi]$ et que la fonction dérivée f' est continue sur ce segment. En déduire l'existence d'un réel M' tel que pour tout t élément de $[\alpha,\ \pi]$: $|f'(t)|\le M'$.

2.3. On pose pour tout entier naturel n : $I_n=\int_\alpha^\pi f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\ dt$. Montrer en utilisant une intégration par parties que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

3. Déduire de la question **2** que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{6}-u_n\right)=0$

2. Eléments de correction

A. Une suite majorée

On considère les suites u et v définies sur **N*** par $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad ; \qquad v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\times n}$$

1. $\dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{n} = \dfrac{(A+B)n - B}{(n-1)n}$.

Par identification : $(\forall n \geq 2 \quad (A+B)n - B = 1) \underset{gilbertjulia2018}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B=0 \\ -B=1 \end{cases}$, c'est-à-dire que $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$.

Pour tout entier $n \geq 2$: $\dfrac{1}{(n-1)\times n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 2$ $v_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$, ce qui crée une somme télescopique dont ne subsiste, par sommation, que le premier et le dernier terme : $v_n = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n}$

2. Pour tout n élément de **N*** : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2}$. La différence de deux termes consécutifs de la suite u étant toujours strictement positive, la suite u est strictement croissante.

Pour tout entier $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{(k-1)\times k}$

Donc, par comparaison terme à terme, pour tout entier $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{(k-1)\times k}$ d'où l'on déduit : $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^2} \underset{gj}{<} 1 + \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{(k-1)\times k} = v_n$. Par définition des termes de rang 1, on peut écrire une inégalité de même sens, mais au sens large cette fois : $u_1 \leq v_1$.

Finalement, pour tout n élément de **N*** : $u_n \leq v_n$

Le réel 2 étant un majorant de la suite v, c'est aussi un majorant de la suite u. La suite u étant croissante et majorée par 2, elle converge et sa limite est inférieure ou égale à 2.

B. Une affaire de fonctions trigonométriques et d'intégrales

On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un entier naturel :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

1. Soit t un élément de l'intervalle $[0,\ \pi]$.

On pose pour tout entier $n \geq 2$: $C_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ et $S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sin kt$

1.1. $C_n(t)+iS_n(t)=\sum_{k=1}^{k=n}(\cos kt+i\sin kt)=\sum_{k=1}^{k=n}\mathbf{e}^{ikt}$. Ceci apparaît comme une somme des termes d'une suite géométrique dont le premier terme est $\mathbf{e}^{it}$ et dont la raison est $\mathbf{e}^{it}$.

Lorsque $t=0$, la raison est égale à 1, et l'on obtient : $C_n(0)=\sum_{k=1}^{k=n}1=n$.

Lorsque t est un élément de $]0,\ \pi]$, la raison est différente de 1 :

$$C_n(t)+iS_n(t)=\mathbf{e}^{it}\frac{1-\mathbf{e}^{int}}{1-\mathbf{e}^{it}}=\mathbf{e}^{it}\frac{\mathbf{e}^{i\left(\frac{nt}{2}\right)}\left(\mathbf{e}^{-i\left(\frac{nt}{2}\right)}-\mathbf{e}^{i\left(\frac{nt}{2}\right)}\right)}{\mathbf{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathbf{e}^{-i\frac{t}{2}}-\mathbf{e}^{i\frac{t}{2}}\right)}$$ et $C_n(t)$ en est la partie réelle.

$$C_n(t)+iS_n(t)=\mathbf{e}^{i\frac{(n+1)t}{2}}\frac{\left(-2i\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right)}{\left(-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}\underset{gibertjulia\,2018}{=}\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)+i\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\right)\frac{\left(\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}$$

La partie réelle de ce nombre complexe est : $C_n(t)=\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right).\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

1.2. L'application C_n de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbf{R}$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\ \pi]$ en tant que cocktail de fonctions continues sur cet intervalle. Il reste à examiner la continuité éventuelle en zéro.

On rappelle à cet effet une limite de référence : $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$. *On l'utilisera à plusieurs occasions en faisant apparaître un quotient de ce genre.*

$$\lim_{t\to 0}C_n(t)=\lim_{t\to 0}\left(n\times\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)._{gj}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\left(\frac{nt}{2}\right)}.\frac{\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)=n=C_n(0)$$

L'application C_n est aussi continue en zéro, C_n est continue sur l'intervalle fermé $[0,\ \pi]$.

2. Pour tout t élément de $]0,\ \pi]$:

$$2\sin\frac{nt}{2}.\cos\frac{n+1}{2}t=\sin\left(\frac{nt}{2}+\frac{n+1}{2}t\right)+\sin\left(\frac{nt}{2}-\frac{n+1}{2}t\right)\underset{gjulia}{=}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

et donc $2C_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\underset{gjulia}{=}\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-1$ puis $1+2C_n(t)\underset{gjulia}{=}\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}(2n+1)\times\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\frac{2n+1}{2}t}\times\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=2n+1$$

L'application de l'intervalle semi-ouvert $]0,\ \pi]$ dans **R** qui à t associe $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une application g_n continue sur le segment $[0,\ \pi]$ en posant : $g_n(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=2n+1$.

En résumé, la fonction continue sur l'intervalle fermé $[0,\ \pi]$: $t\mapsto 1+2C_n(t)$ est identique à la fonction g_n définie par : $g_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ sur le semi-ouvert $]0,\ \pi]$ et prolongée par : $g_n(0)=2n+1$

3. Soit un entier n de **N***.

Par une première intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\ dt=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sin nt\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin nt\ dt$

Par une deuxième intégration par parties :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin nt\ dt=\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos nt\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt=\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos nt+\frac{1}{\pi n^2}\sin nt\right]_0^{\pi}.$$

On obtient : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\ dt=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sin nt+\frac{1}{n^2}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos nt-\frac{1}{\pi n^3}\sin nt\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n^2}$

Par définition de C_n : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\ dt=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{k=n}(\cos kt)\right]dt$ $\qquad$.

gilbertjulia 2018

Par additivité de l'intégrale, on peut intervertir la sommation finie $\sum_{k=1}^{k=n}\ldots.$ et le symbole intégrale :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\,dt=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt\right)_{\textit{gilbertjulia}\,2018}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}=u_n$$

4. $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6\pi}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}$

Pour tout entier n de **N* :** $\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt-\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)(1+2C_n(t))dt$

Compte tenu de l'identification avec la fonction g_n vue ci-dessus : $\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)dt$

C. Une limite célèbre (déterminée par Euler en 1735)

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,\ \pi]$ par $f(0)=2$ et pour tout t élément de $]0,\ \pi]$ par $f(t)=\dfrac{t-\dfrac{t^2}{2\pi}}{\sin\dfrac{t}{2}}$.

1. f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\ \pi]$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle. Il reste à considérer la continuité éventuelle en zéro.

$\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\dfrac{t^2}{2\pi}}{\dfrac{t}{2}}\times\dfrac{\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(2-\dfrac{t}{\pi}\right)\times\dfrac{\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}=2=f(0)$. La fonction f est aussi continue en zéro, elle est continue sur le segment $[0,\ \pi]$.

L'image de ce segment par la fonction continue f est un segment.

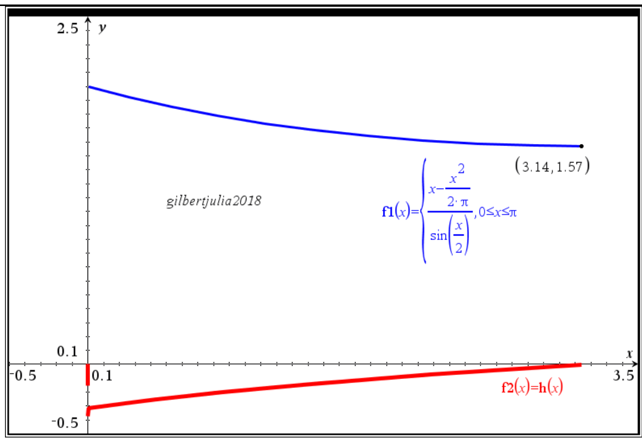
D'une part f est positive sur $[0,\ \pi]$ et admet sur cet intervalle un minimum m positif qu'elle atteint, et d'autre part la fonction f admet sur ce segment un maximum M au moins égal à 2 qu'elle atteint. L'image par f de $[0,\ \pi]$ est un segment de la forme $[m,\ M]$ avec $0\le m\le 2\le M$.

Il existe un réel M tel que pour tout t élément de $[0,\ \pi]$: $0\le f(t)\le M$

Une représentation graphique sommaire de la fonction f laisse conjecturer que pour tout t élément de $[0,\ \pi]$: $\dfrac{\pi}{2}\le f(t)\le 2$, encadrement qui resterait à prouver.

On conjecture que le maximum est atteint en zéro et que précisément $M=2$.

On a représenté en rouge la fonction dérivée f'. On note une aberration graphique au voisinage de zéro.



2. Soit α un réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

2.1. Pour tout entier naturel n : $\left|\int_0^\alpha f(t)\sin\dfrac{2n+1}{2}t\ dt\right|\le\int_0^\alpha\left|f(t)\sin\dfrac{2n+1}{2}t\right|\ dt\le\int_0^\alpha M\ \ dt=\alpha M$

On note au passage que $\int_0^\alpha f(t)\sin\dfrac{2n+1}{2}t\ dt=\int_0^\alpha\left(t-\dfrac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\ dt$

2.2. La fonction f est continûment dérivable sur $[\alpha,\ \pi]$ en tant que cocktail de fonctions continûment dérivables sur cet intervalle (il n'est pas nécessaire de faire le calcul de la dérivée). La dérivée étant continue sur le segment $[\alpha,\ \pi]$, elle y est bornée, donc elle y est bornée en valeur absolue. Il existe un réel M' tel que pour tout t élément de $[\alpha,\ \pi]$: $|f'(t)|\le M'$.

2.3. $I_n = \int_\alpha^\pi \left(\dfrac{t - \dfrac{t^2}{2\pi}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right) \sin \dfrac{2n+1}{2} t \, dt = \left[-\dfrac{2}{2n+1} f(t) \cos \dfrac{2n+1}{2} t \right]_\alpha^\pi + \dfrac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi f'(t) \cos \dfrac{2n+1}{2} t \, dt$.

D'une part $\left| -\dfrac{2}{2n+1} f(t) \cos \dfrac{2n+1}{2} t \right| \leq \dfrac{2M}{2n+1}$, donc $\left| \left[-\dfrac{2}{2n+1} f(t) \cos \dfrac{2n+1}{2} t \right]_\alpha^\pi \right| \leq \dfrac{4M}{2n+1}$.

D'autre part $\left| \int_\alpha^\pi f'(t) \cos \dfrac{2n+1}{2} t \, dt \right| \leq \int_\alpha^\pi |f'(t)| \, dt \leq M'(\pi - \alpha)$

Ce qui implique la majoration : $|I_n| \leq \dfrac{4M + 2M'(\pi - \alpha)}{2n+1}$,

La suite (I_n) est majorée en valeur absolue par une suite convergeant vers zéro. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

3. On note que $I_n = \int_\alpha^\pi \left(t - \dfrac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) \, dt$

D'après la partie précédente : $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n = \int_0^\pi \left(t - \dfrac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) \, dt = \int_0^\alpha \left(t - \dfrac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) \, dt + I_n$, et cela quel que soit le réel α tel que $0 < \alpha < \pi$

D'après le résultat obtenu dans **2.1** : $\left| \dfrac{\pi^2}{6} - u_n \right| \leq \alpha M + I_n$

D'après celui obtenu dans **2.2**, par passage à la limite et en notant l la limite de la suite u : $\left| \dfrac{\pi^2}{6} - l \right| \leq \alpha M$ et cela quel que soit le réel α tel que $0 < \alpha < \pi$ (aussi petit qu'on le veut).

Nécessairement : $\dfrac{\pi^2}{6} - l = 0$

La série somme des inverses des entiers converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$

Le sujet Aix-Marseille 1981 proposait, indépendamment de ce problème, un intéressant exercice sur l'infinité des nombres premiers.

Ce sujet est connu pour être l'un des sujets les plus consistants de l'histoire de la filière C