CAPESA Maths 2021, épreuve 1, problème 3 : Une introduction au modèle de Wright-Fisher

L'énoncé de ce sujet est disponible sur cette page :

https://www.concours.agriculture.gouv.fr/espace-telechargement/annales-depreuves/?cate=28

Voici une correction de l'exercice 3 de ce sujet. Le « modèle de Wright-Fisher » est utilisé pour décrire la manière dont les individus d'une population se transmettent leurs gènes d'une génération à la suivante.

1. On peut associer à l'expérience l'univers $\Omega=\{B,\ N\}^3$ muni d'une muni d'une loi de probabilité autre que l'équiprobabilité. L'évènement $[X_1=2]$ est l'évènement $\{(B,N,N);(N,B,N),(N,N,B)\}$, chacune des trois éventualités le composant ayant pour probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3^3}$. C'est pourquoi $P([X_1=2])=3\times\frac{2}{3^3}=\frac{2}{3^2}$

2. Le fait que les tirages soient effectués « avec remise » implique l'hypothèse de leur indépendance. Il s'agit d'effectuer trois épreuves de Bernoulli consécutives, de paramètre $p=\frac{1}{3}$ puisque on note le nombre de boules noires obtenues, de façon indépendante. C'est pourquoi X_1 suit la loi $B\left(3\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

De ce fait, la loi de X_1 est la suivante :

X_1	0	1	2	3
probabilités	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

3. Les probabilités conditionnelles d'obtenir une boule noire, sachant la valeur de X_1, lors d'un unique tirage d'une nouvelle boule sont les suivantes : $P_{[X_1=0]}(N)=0$; $P_{[X_1=1]}(N)=\frac{1}{3}$; $P_{[X_1=2]}(N)=\frac{2}{3}$; $P_{[X_1=3]}(N)=1$.

3.a. Sous l'hypothèse $[X_1=0]$, « tirer une boule noire de la deuxième urne » est l'évènement impossible, les trois tirages successifs de la deuxième urne sont nécessairement trois boules blanches : $P_{[X_1=0]}([X_2=0])=1$

Sous l'hypothèse $[X_1=3]$, « tirer une boule noire de la deuxième urne » est l'évènement certain, les trois tirages successifs de la deuxième urne sont nécessairement trois boules noires : $P_{[X_1=3]}([X_2=3])=1$

3.b, c et d. Sous l'hypothèse $[X_1 = k]$, avec $k = 1$; 2 « tirer une boule noire de la deuxième urne » est un évènement de probabilité $\frac{k}{3}$, les trois tirages avec remise successifs de la deuxième urne constituent trois épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre $\frac{k}{3}$, la variable aléatoire $X_{2,\,[X_1=k]}$ suit la loi binomiale $B\left(3\;;\;\frac{k}{3}\right)$

En conséquence, les diverses probabilités conditionnelles en jeu sont les suivantes :
$P_{[X_1=1]}([X_2=0]) = \frac{8}{27}$; $P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \frac{12}{27}$; $P_{[X_1=1]}([X_2=2]) = \frac{6}{27}$; $P_{[X_1=1]}([X_2=3]) = \frac{1}{27}$ ainsi que :
$P_{[X_1=2]}([X_2=0]) = \frac{1}{27}$; $P_{[X_1=2]}([X_2=1]) = \frac{6}{27}$; $P_{[X_1=2]}([X_2=2]) = \frac{12}{27}$; $P_{[X_1=2]}([X_2=3]) = \frac{8}{27}$

En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P([X_2=0]) = P([X_1=0]) + P([X_1=1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2=0]) + P([X_1=2]) \times P_{[X_1=2]}([X_2=0])$$

$$P([X_2=1]) = P([X_1=1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2=1]) + P([X_1=2]) \times P_{[X_1=2]}([X_2=1])$$

$$P([X_2=2]) = P([X_1=1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2=2]) + P([X_1=2]) \times P_{[X_1=2]}([X_2=2])$$

$$P([X_2=3]) = P([X_1=1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2=3]) + P([X_1=2]) \times P_{[X_1=2]}([X_2=3]) + P([X_1=3])$$

Autrement dit :

$$P([X_2=0]) = \frac{8}{27} + \frac{12}{27} \times \frac{8}{27} + \frac{6}{27} \times \frac{1}{27} = \frac{106}{243}$$

$$P([X_2=1]) = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} + \frac{6}{27} \times \frac{6}{27} = \frac{20}{81}$$

$$P([X_2=2]) = \frac{12}{27} \times \frac{6}{27} + \frac{6}{27} \times \frac{12}{27} = \frac{16}{81}$$

$$P([X_2=3]) = \frac{12}{27} \times \frac{1}{27} + \frac{6}{27} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{29}{243}$$

4.a et b. Même raisonnement que dans la question précédente. Dans ce contexte, les diverses probabilités conditionnelles en jeu sont les suivantes :

D'une part : $P_{[X_n=0]}([X_{n+1}=0])=1$; $P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=3])$ et d'autre part :

$P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=0])=\frac{8}{27}$; $P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])=\frac{12}{27}$; $P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=2])=\frac{6}{27}$; $P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=3])=\frac{1}{27}$;

$P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=0])=\frac{1}{27}$; $P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1])=\frac{6}{27}$; $P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2])=\frac{12}{27}$; $P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=3])=\frac{8}{27}$

En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P([X_{n+1}=0])=P([X_n=0])+P([X_n=1])\times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=0])+P([X_n=2])\times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=0])$$

Autrement dit :

$$P([X_{n+1}=0])=P([X_n=0])+\frac{8}{27}P([X_n=1])+\frac{1}{27}P([X_n=2])$$

5. De la même façon :

$$P([X_{n+1}=1])=P([X_n=1])\times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])+P([X_n=2])\times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1])$$

$$P([X_{n+1}=2])=P([X_n=1])\times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=2])+P([X_n=2])\times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2])$$

$$P([X_{n+1}=3])=P([X_n=1])\times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=3])+P([X_n=2])\times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=3])+P([X_n=3])$$

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{gathered}P([X_{n+1}=0])=P([X_n=0])+\frac{8}{27}P([X_n=1])+\frac{1}{27}P([X_n=2])\\ P([X_{n+1}=1])=P([X_n=1])\times\frac{12}{27}+P([X_n=2])\times\frac{6}{27}\\ P([X_{n+1}=2])=P([X_n=1])\times\frac{6}{27}+P([X_n=2])\times\frac{12}{27}\\ P([X_{n+1}=3])=P([X_n=1])\times\frac{1}{27}+P([X_n=2])\times\frac{8}{27}+P([X_n=3])\end{gathered}}$$

Matriciellement, on obtient comme prévu : $\begin{pmatrix}P([X_{n+1}=0])\\P([X_{n+1}=1])\\P([X_{n+1}=2])\\P([X_{n+1}=3])\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{8}{27}&\frac{1}{17}&0\\0&\frac{12}{27}&\frac{6}{27}&0\\0&\frac{6}{27}&\frac{12}{27}&0\\0&\frac{1}{17}&\frac{8}{27}&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P([X_n=0])\\P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}$

On désigne désormais par A la matrice : $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & 0 \\ 0 & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$

6.a. Par définition : $E(X_n)=0\times P([X_n=0])+1\times P([X_n=1])+2\times P([X_n=2])+3\times P([X_n=3])$, soit $E(X_n)=P([X_n=1])+2\times P([X_n=2])+3\times P([X_n=3])$ ce qui correspond aussi bien au produit matriciel : $E(X_n)=(0\quad 1\quad 2\quad 3)\times Y_n$.

6.b. Au rang $n+1$: $E(X_{n+1})=(0\quad 1\quad 2\quad 3)\times Y_{n+1}=(0\quad 1\quad 2\quad 3)\times A\times Y_n$

Or : $(0\quad 1\quad 2\quad 3)\times A=(0\quad 1\quad 2\quad 3)$, le vecteur ligne $(0\quad 1\quad 2\quad 3)$ est invariant par sa multiplication à droite par A.

6.c. Il en résulte que, quel que soit l'entier strictement positif n : $E(X_{n+1})=(0\quad 1\quad 2\quad 3)\times Y_n=E(X_n)$.

La suite $(E(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite constante qui prend la valeur : $E(X_1)=\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+3\times\frac{1}{27}=1$

7.a. D'après le résultat de la question **2** : $u_1=\frac{8}{27}$.

7.b. Rappelons le résultat de la question **4** : $P([X_{n+1}=0])=P([X_n=0])+\frac{8}{27}P([X_n=1])+\frac{1}{27}P([X_n=2])$ pour tout entier strictement positif n.

Soit, avec les notations actuelles : $u_{n+1}=u_n+\frac{8}{27}P([X_n=1])+\frac{1}{27}P([X_n=2])$.

7.c. Or, les probabilités $P([X_n=1])$; $P([X_n=2])$ sont des nombres positifs ou nuls. On en déduit que pour tout entier strictement positif n : $u_{n+1}\geq u_n$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite croissante.

7.d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de probabilités : elle est majorée par 1.

Etant croissante et majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et admet une limite l_0 inférieure ou égale à son majorant (et supérieure ou égale à son premier terme $\frac{8}{27}$)

Quant au résultat « admis », il résulterait d'un raisonnement semblable :

De la même façon : $P([X_{n+1}=3])=P([X_n=1])\times\dfrac{1}{27}+P([X_n=2])\times\dfrac{8}{27}+P([X_n=3])$

Soit, avec les notations actuelles :. $x_{n+1}=P([X_n=1])\times\dfrac{1}{27}+P([X_n=2])\times\dfrac{8}{27}+x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite croissante pour des raisons analogues à ci-dessus et majorée par 1 : elle converge vers une limite l_3 au plus égale à 1.

8 a et b. Rappelons des résultats de la question **5.** Pour tout entier n strictement positif :

$$P([X_{n+1}=1])=P([X_n=1])\times\frac{12}{27}+P([X_n=2])\times\frac{6}{27}$$

$$P([X_{n+1}=2])=P([X_n=1])\times\frac{6}{27}+P([X_n=2])\times\frac{12}{27}$$

Soit, avec les notations actuelles : $v_{n+1}=v_n\times\dfrac{12}{27}+w_n\times\dfrac{6}{27}$ et $w_{n+1}=v_n\times\dfrac{6}{27}+w_n\times\dfrac{12}{27}$

On en déduit par addition membre à membre et soustraction membre à membre deux relations :

$$\begin{cases} v_{n+1}+w_{n+1}=\left(v_n\times\dfrac{12}{27}+w_n\times\dfrac{6}{27}\right)+\left(v_n\times\dfrac{6}{27}+w_n\times\dfrac{12}{27}\right)=\dfrac{2}{3}\times(v_n+w_n) \\ v_{n+1}-w_{n+1}=\left(v_n\times\dfrac{12}{27}+w_n\times\dfrac{6}{27}\right)-\left(v_n\times\dfrac{6}{27}+w_n\times\dfrac{12}{27}\right)=\dfrac{2}{9}\times(v_n-w_n) \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} s_{n+1}=\dfrac{2}{3}\times s_n \\ t_{n+1}=\dfrac{2}{9}\times t_n \end{cases}$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite géometrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{9}$

8.c. Leurs premiers termes sont, respectivement : $s_1=v_1+w_1=\dfrac{12}{27}+\dfrac{6}{27}=\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$ et $t_1=v_1-w_1=\dfrac{12}{27}-\dfrac{6}{27}=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$, ce qui conduit aux formules explicites : $s_n=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $t_n=\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ pour tout entier strictement positif n.

En conséquence : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}(s_n + t_n) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right) \\ v_n = \dfrac{1}{2}(s_n - t_n) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right) \end{cases}$

8.d. sont des suites géométriques dont les raisons sont positives et strictement inférieures à 1 : elles convergent vers zéro. Il en est de même de leur demi-somme et de leur demi-différence.

Les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent vers zéro : $l_1 = l_2 = 0$

9. En passant à la limite dans la somme des probabilités qui est constante et égale à 1 : $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 = 1$ soit $l_0 + l_3 = 1$

En passant à la limite dans l'espérance qui est constante et égale à 1 : $l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 1$ soit $3l_3 = 1$

On en déduit : $l_0 = \dfrac{2}{3}$; $l_3 = \dfrac{1}{3}$

On peut conclure qu'à long terme, il est certain qu'au bout d'un nombre fini d'expériences l'urne ne va contenir que des boules d'une même couleur, la probabilité qu'il s'agisse de boules noires étant $\dfrac{1}{3}$.

Une simulation peut illustrer cet état de fait, comme celle-ci-contre, rédigée en langage TI-Nspire