Problème 1, Vrai, Faux

I.1. Faux : 2 n'a pas d'inverse multiplicatif dans **Z**.

I.2. Vrai : l'ensemble D des nombres décimaux est un anneau.

I. 3. Faux : Un décimal est le quotient d'un entier par une puissance de dix ; un nombre rationnel est décimal si et seulement si le dénominateur de la fraction irréductible qui le représente n'admet comme facteurs premiers que 2 et 5. Ce qui n'est pas le cas de 1/3.

I.4. Vrai : si $\sqrt{5}$ était rationnel, il existerait une fraction irréductible telle que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$. On aurait $5q^2 = p^2$. L'entier *p* diviserait 5 (th de Gauss) et d'autre part 5 diviserait p^2 ; 5 étant un nombre premier, s'il divise p^2, alors il divise *p* ; nécessairement, $p = 5$ mais aucun entier *q* n'est tel que $\sqrt{5} = \frac{5}{q}$ (il devrait avoir pour carré 5, et aucun entier n'a cette propriété). L'hypothèse $\sqrt{5}$ rationnel aboutit à une contradiction.

I.5. Faux : $\sqrt{4} = 2$.

I.6. Faux : $\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0$ qui est rationnel.

I.7. Vrai : S'il existait *r* rationnel et *x* irrationnel tel que $x + r = r'$ rationnel on aurait $x = r' - r$ qui serait rationnel. L'hypothèse aboutit à une contradiction.

II.8. Vrai : C'est l'équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point $A(\frac{3}{2}\,;0)$.

II.9. Vrai : $\overrightarrow{AB}\ (-2\,;1)$ et $\overrightarrow{CD}\ (3\,;6)$ sont directeurs des deux droites et sont orthogonaux (leur produit scalaire est égal à 0).

II.10. Faux : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AC^2 = 8$.

III.11. Faux : Les droites D passant par $A\ (0,0,1)$ et parallèle à *Ox* et D' passant par $B(0,0,-1)$ et parallèle à *Oy* sont toutes deux parallèles au plan d'équation $z = 0$ et ne sont pas parallèles entre elles. Ou bien il suffit de considérer deux droites non parallèles *incluses* dans un même plan.

III.12. Faux : C'est l'équation d'un plan parallèle à l'axe *Oz*.

III.13. Il s'agit de la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = k \end{cases}$

13.a. Vrai (valeur 1 du paramètre)

13.b. Faux (un vecteur directeur est le vecteur (3 ; -2 ; 1)).

13.c. Vrai : $3(-2+3k)+4(2-2k)-k=-6+9k+8-8k-k=2$

IV.14. Vrai : elles sont toutes deux de rang 1 puisque leur ensemble image est, dans les deux cas, la même droite vectorielle d'équation *y* = *x*.

IV.15. Faux : elles n'ont pas le même polynôme caractéristique, X^2-2X pour l'une et X^2-3X pour l'autre. Elles ne peuvent donc pas être semblables (deux matrices semblables ont *nécessairement* le même polynôme caractéristique).

IV.16. Faux : la matrice n'a qu'une valeur propre (la valeur 1) et son sous-espace propre est de dimension 1.

IV.17. Vrai : la matrice a deux valeurs propres distinctes, 1 et 2.

V.18. Faux : On peut seulement dire qu'elle converge vers une limite supérieure ou égale à 0. Contre-exemple, la suite de terme général $1+\frac{1}{n+1}$.

V.19. Faux : Contre-exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

VI. La variable aléatoire « nombre de points » suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5\ ;\ \frac{1}{2}\right)$**.**

20, 21 et 22 sont vraies.

VII.23. Faux : Contrexemple : 6 et 4 divisent 12 mais $6\times4=24$ ne divise pas 12

VII.24. Vrai : Car *bc* est alors multiple de a^2.

VII.25 Vrai : Car 19 et 53 sont premiers entre eux. La condition *a* et *n* premiers entre eux est une condition suffisante pour assurer qu'une congruence $ax\equiv b\ \ [n]$ a des solutions ; en effet, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers *u* et *v* tels que $au+bn=1$ et en conséquence, *a* possède un « inverse multiplicatif modulo *n* », c'est-à-dire que *u* vérifie la congruence $au\equiv1\ \ [n]$. Il en résulte que $x=bu$ est une solution de la congruence.