CAPES 2022 : Problème 2, convexité

Le sujet est à se procurer en ligne.

Eléments de correction.

I. Préliminaires

1. La fonction f est croissante sur I : $\forall (x, y) \in I^2 : y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

2. La fonction f n'est pas croissante sur I : $\exists (x, y) \in I^2 : y > x \;\; ET \;\; f(y) < f(x)$

3. La fonction f est une fonction affine sur I : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I : f(x) = ax + b$

4. La fonction f est continue en un point a de I : $\exists\, a \in I, \forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha > 0, |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

II. Quelques propriétés et exemples

5. La caractérisation (*) d'une fonction f convexe sur I est :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0\,;1] : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Dire que la fonction opposée de f est convexe sur I, c'est dire que :

$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0\,;1] : -f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda[-f(x)] + (1-\lambda)[-f(y)]$, autrement dit que :

(**) $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0\,;1] : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, inégalité qui caractérise la concavité d'une fonction f sur I.

6. Caractérisation graphique de la convexité :

6.a. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Le nombre $y - x$ est de ce fait un nombre réel strictement positif.

- Soit z un nombre réel tel que il existe $\lambda \in [0\,;1] : z = \lambda x + (1-\lambda) y$ c'est-à-dire, ce qui revient au même, tel que : $y - z = \lambda(y - x)$. La double inégalité $0 \leq \lambda \leq 1$ implique la double inégalité $0 \leq y - z \leq y - x$, c'est-à-dire que d'une part $z \leq y$ et que d'autre part $-z \leq -x$, soit $z \geq x$. Ainsi : $x \leq z \leq y$, le nombre réel z est tel que $z \in [x\,;y]$.

- Réciproquement, soit z un nombre réel tel que $z \in [x\,;y]$, c'est-à-dire tel que $x \leq z \leq y$. Le nombre $y - z$ est de ce fait un nombre réel tel que $0 \leq y - z \leq y - x$ et, par conséquent : $0 \leq \dfrac{y-z}{y-x} \leq 1$. Si nous posons : $\lambda = \dfrac{y-z}{y-x}$, ce nombre λ appartient à l'intervalle $[0\,;1]$ et de plus : $y - z = \lambda(y - x)$, autrement dit : $z = \lambda x + (1-\lambda) y$. Il existe $\lambda \in [0\,;1] : z = \lambda x + (1-\lambda) y$

6.b. Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction convexe est « sous ses cordes », c'est-à-dire que si on considère deux points distincts quelconques *M* et *N* situés sur cette courbe, l'arc de la courbe situé entre *M* et *N* est en dessous de la corde [*MN*]

7. Opérations et convexité

7.a. Application du la compatibilité de l'inégalité « inférieur ou égal » avec l'addition dans l'ensemble des réels.

7.b. Soit *f* une fonction convexe sur un intervalle *I* et soit *g* une fonction convexe et croissante sur un intervalle *J* contenant l'image de *I* par *f*.

Soit $(x, y) \in I^2$ et soit $\lambda \in [0\,;1]$.

La fonction *f* étant une fonction convexe sur *I* : $f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Les nombres $f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right)$, $f(x)$, $f(y)$ appartiennent à l'image par *f* de *I* , ils appartiennent donc à *J*.

Puisque *J* est un intervalle et puisque $\lambda \in [0\,;1]$, si $f(x)$, $f(y)$ appartiennent à *J*, il en est de même de $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

- La fonction *g* étant une fonction croissante sur *J* : $g\left[f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right)\right] \leq g\left[\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\right]$

- La fonction *g* étant une fonction convexe sur *J* : $g\left[\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\right] \leq \lambda g\left[f(x)\right] + (1-\lambda) g\left[f(y)\right]$

Par conséquent : $g\left[f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\right]\leq \lambda g\left[f(x)\right]+(1-\lambda)g\left[f(y)\right]$

Ce qui prouve la convexité de la fonction composée $g\circ f$ sur l'intervalle *I*.

7.c. De même, la composée d'une fonction concave *f* sur un intervalle *I* par une autre fonction *g* qui est à la fois concave et croissante sur un intervalle *J* contenant l'image par *f* de *I* est une fonction concave sur *I*.

8. Quelques exemples

8.a. $\forall (x, y)\in \mathrm{R}^2, \forall\lambda\in[0\,;1] : |\lambda x+(1-\lambda)y|\leq|\lambda x|+|(1-\lambda)y|$ d'après l'inégalité triangulaire que vérifie la fonction valeur absolue.

D'autre part, vu que le nombre λ est compris entre 0 et 1 : $|\lambda x|=\lambda|x|$ et $|(1-\lambda)y|=(1-\lambda)|y|$

Donc : $\forall (x, y)\in \mathrm{R}^2, \forall\lambda\in[0\,;1] : |\lambda x+(1-\lambda)y|\leq\lambda|x|+(1-\lambda)|y|$, ce qui prouve la convexité de la fonction valeur absolue sur **R**.

8.b. $\forall (x, y)\in \mathrm{R}^2, \forall\lambda\in[0\,;1] : \left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)^2-\lambda x^2-(1-\lambda)y^2=-\lambda(1-\lambda)(y-x)^2$ (je ne détaille pas les calculs).

Ce résultat est toujours négatif, ce qui prouve que $\forall (x, y)\in \mathrm{R}^2, \forall\lambda\in[0\,;1] : \left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)^2\leq\lambda x^2+(1-\lambda)y^2$. La fonction carré est une fonction convexe sur **R.**

8.c. On suppose dans toute cette question **8.c** que *x* et *y* sont deux réels strictement positifs tels que $x<y$.

8.c.i La fonction dérivée de la fonction *g* est la fonction ainsi définie sur **R*⁺** : $g'(t)=\dfrac{y-x}{(y-x)t-y}-\ln x+\ln y$. Cette fonction a pour dérivée la fonction ainsi définie sur $\mathbf{R}^{*+}$: $g''(t)=-\dfrac{(y-x)^2}{\left((y-x)t-y\right)^2}$. Cette fonction est une fonction strictement négative sur $\mathbf{R}^{*+}$, ce qui prouve que la fonction dérivé de *g* est une fonction strictement décroissante.

8.c.ii. La fonction inverse est une fonction strictement décroissante sur **R*+** , donc *a fortiori* sur l'intervalle $\left[x\,;\,y\right]$.

En encadrant l'intégrale de la fonction inverse sur cet intervalle : $\int_x^y \frac{1}{y}dt \leq \int_x^y \frac{1}{t}dt \leq \int_x^y \frac{1}{x}dt$, nous obtenons : $\frac{y-x}{y} \leq \ln y - \ln x \leq \frac{y-x}{x}$ d'où, sans difficulté, l'inégalité attendue. Mais il semble que l'inégalité trouvée ici soit plus commode.

8.c.iii. $g'(0) = -\frac{y-x}{y} - \ln x + \ln y$ et $g'(1) = -\frac{y-x}{x} - \ln x + \ln y$. Or, des inégalités que nous avons écrites ci-dessus, on déduit que : $\ln y - \ln x - \frac{y-x}{x} \leq 0 \leq \ln y - \ln x - \frac{y-x}{y}$, c'est-à-dire que $g'(1) \leq 0 \leq g'(0)$. Ceci, étant entendu que, puisque *g'* est une fonction strictement décroissante, au plus une des deux inégalités larges peut être une égalité.

8.c.iv. Ou bien l'un des deux nombres $g'(1)$, $g'(0)$ est nul, ou bien le premier est strictement négatif et l'autre est strictement positif et, dans ce cas, la fonction *g'* étant une fonction continue et strictement monotone, la valeur zéro est, une seule fois, valeur intermédiaire : la fonction *g'* s'annule une unique fois.

8.c.v. Par construction de la fonction *g* : $g(0) = g(1) = 0$.

Ces résultats excluent le fait que l'un des deux nombres $g'(1)$, $g'(0)$ est nul, car alors la fonction *g'* aurait un signe constant et *g* serait strictement monotone, ce qui n'est pas. Il s'avère que le premier cité des deux est strictement négatif et l'autre est strictement positif et que la fonction *g'* est d'abord positive puis négative : la fonction *g* est d'abord croissante, puis décroissante, elle est donc positive sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, strictement à l'intérieur de l'intervalle.

On en déduit que $\forall t \in \left[0\ \ 1\right] : \ln\left(t\,x + (1-t)\,y\right) - t\ln x - (1-t)\ln y \geq 0$, autrement dit que, ce qui caractérise, vu le choix arbitraire de *x* et *y*, la concavité de la fonction logarithme népérien : . $\forall t \in \left[0\ \ 1\right] : \ln\left(t\,x + (1-t)\,y\right) \geq t\ln x + (1-t)\ln y$

9. Généralisation de l'inégalité de convexité

L'inégalité de convexité telle qu'on l'a écrite est fondatrice du cas où on considère deux nombres x_1 et x_2 de l'intervalle *I* affectés de coefficients positifs de somme égale à 1 soit λ_1 ; $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

Supposons que l'inégalité à démontrer soit établie pour un certain rang entier *n* au moins égal à 2 : supposons que quel que soit le jeu de *n* nombres appartenant à *I* affectés de coefficients positifs de somme 1 on ait $f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left[\left(\lambda_1 + \ldots \lambda_n\right) X\right] \le \lambda_1 f\left(x_1\right) + \ldots \lambda_n\, f\left(x_n\right)$

Soit alors un jeu de $(n+1)$ nombres de l'intervalle *I* affectés de coefficients λ_i positifs dont la somme est égale à 1.

Introduisons le nombre $X = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$ (autrement dit le « barycentre partiel » des *n* premiers nombres). Si tous les x_i appartiennent au segment *I*, ce barycentre partiel *X* appartient aussi au segment *I*.

On peut appliquer dans un premier temps l'inégalité de convexité pour deux nombres de *I* aux deux nombres *X* et x_{n+1} affectés des coefficients : $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$ et λ_{n+1} :

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left[\left(\lambda_1 + \ldots \lambda_n\right) X + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right] \le \left(\lambda_1 + \ldots \lambda_n\right) f\left(X\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$$

Or : $f\left(X\right) = f\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} x_1 + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} x_n\right)$

Mettons maintenant en jeu l'hypothèse de récurrence pour *n* nombres appartenant à *I* :

$$f\left(X\right) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} x_n\right) \le \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} f\left(x_1\right) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} f\left(x_n\right)$$

Nous obtenons : $f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left[\left(\lambda_1 + \ldots \lambda_n\right) X + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right] \le \left(\lambda_1 f\left(x_1\right) + \ldots \lambda_n\, f\left(x_n\right)\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$, ce qui n'est autre que l'inégalité que nous devions établir au rang suivant $(n+1)$.

Par récurrence, nous avons montré que pour tout entier *n* au moins égal à 2, quel que soit le jeu de *n* nombres appartenant à *I* affectés de coefficients positifs de somme 1 :

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left[\left(\lambda_1 + \ldots \lambda_n\right) X\right] \le \lambda_1 f\left(x_1\right) + \ldots \lambda_n\, f\left(x_n\right)$$

10.Deux applications

10.a. La fonction logarithme népérien est une fonction concave. Appliquons l'inégalité précédente pour trois nombres *a*, *b*, *c* strictement positifs quelconques, chacun affecté du coefficient $\frac{1}{3}$:

$$\ln\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)\geq \frac{1}{3}\ln a+\frac{1}{3}\ln b+\frac{1}{3}\ln c$$

La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante, elle conserve l'ordre :

$$\exp\left(\ln\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)\right)\geq \exp\left(\frac{1}{3}\ln a+\frac{1}{3}\ln b+\frac{1}{3}\ln c\right)=\exp\left(\frac{1}{3}\ln a\right)\times\exp\left(\frac{1}{3}\ln b\right)\times\exp\left(\frac{1}{3}\ln c\right)$$

Soit : $\exp\left(\ln\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)\right)\geq \exp\left(\frac{1}{3}\ln a+\frac{1}{3}\ln b+\frac{1}{3}\ln c\right)=\exp\left(\frac{1}{3}\ln a\right)\times\exp\left(\frac{1}{3}\ln b\right)\times\exp\left(\frac{1}{3}\ln c\right)$

Or : et d'autre part : $\exp\left(\frac{1}{3}\ln a\right)=\exp\left(\ln\sqrt[3]{a}\right)=\sqrt[3]{a}$ (idem pour les deux autres nombres *b* et *c*).

On obtient : $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{abc}$ comme indiqué dans l'énoncé.

10.b. La fonction : $x\in\left]1\,;+\infty\right[\mapsto u(x)=\ln x$ est une fonction concave qui prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$. La fonction logarithme népérien définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ est à la fois concave et croissante sur ce dernier intervalle. La composition de la fonction *u* par la fonction logarithme népérien est légitime et la question **7.c** assure sa concavité.

On peut appliquer l'inégalité de concavité de la composée à deux réels *x* et *y* tous deux strictement supérieurs à 1 quelconques et affectés chacun du coefficient $\frac{1}{2}$: $\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\ln\circ\ln x+\frac{1}{2}\ln\circ\ln y$

En appliquant une première fois la fonction exponentielle, qui conserve l'ordre :

$$\exp\left(\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)=\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\exp\left(\frac{1}{2}\ln\circ\ln x+\frac{1}{2}\ln\circ\ln y\right)=\sqrt{\exp(\ln\circ\ln x)}\times\sqrt{\exp(\ln\circ\ln y)}=\sqrt{\ln x}\times\sqrt{\ln y}$$

On retient que : $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\sqrt{\ln x}\times\sqrt{\ln y}=\sqrt{(\ln x)\times(\ln y)}$

III. Inégalité des trois pentes et conséquences

11.a.i. La fonction *f* étant supposée convexe sur *I*, on peut appliquer l'inégalité de convexité avec $u=\lambda t+(1-\lambda)a$:

$f(u)=f\big(\lambda t+(1-\lambda)a\big)\leq \lambda f(t)+(1-\lambda)f(a)$

Ainsi : $f(u)-f(a)\leq \lambda f(t)+(1-\lambda)f(a)-f(a)=\lambda\big(f(t)-f(a)\big)$

On peut multiplier par le réel strictement positif $\dfrac{1}{a-u}$ sans changer le sens des inégalités :

$$\frac{f(u)-f(a)}{a-u}\leq \lambda\frac{\big(f(t)-f(a)\big)}{a-u}$$

Mais, vu que $u=\lambda t+(1-\lambda)a$, on peut dire que : $a-u=\lambda(a-t)$. On obtient : $\dfrac{f(u)-f(a)}{a-u}\leq \lambda\dfrac{\big(f(t)-f(a)\big)}{\lambda(a-t)}$

Ainsi : $\dfrac{f(u)-f(a)}{a-u}\leq\dfrac{\big(f(t)-f(a)\big)}{a-t}$ ou aussi bien : $\dfrac{f(u)-f(a)}{u-a}\geq\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$

Nous avons obtenu : $\Delta_a(u)\geq\Delta_a(t)$

11.a.ii. Compte tenu des résultats admis, la fonction $t\mapsto\Delta_a(t)$ est une fonction croissante sur l'ensemble $I-\{a\}$.

11.b.i. Posons : $u=\lambda x+(1-\lambda)y$. Si on suppose que $x<y$ et que $\lambda\in[0\,;1[$, alors $u\in]x\,;y]$, la valeur x étant exclue.

Par hypothèse, la fonction Δ_x est une fonction croissante sur $]x\,;y]$, c'est-à-dire que : de $x<u\leq y$ on peut déduire : $\Delta_x(u)\leq\Delta_x(y)$, ce qu'il nous fallait démontrer.

11.b.ii. En explicitant ces « deltas » : $\Delta_x\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=\dfrac{f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-f(x)}{\lambda(y-x)}\leq\Delta_x(y)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Vu que $y-x>0$, on ne change pas le sens des inégalités si on multiplie les deux membres par $\lambda(y-x)$.

On obtient : $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-f(x)\leq\lambda\left(f(y)-f(x)\right)$ autrement dit : $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f(x)+\lambda\left(f(y)-f(x)\right)$,

inégalité que l'on peut écrire : $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$

Il s'agit bien de l'inégalité de convexité, légitime quels que soient *x, y, λ* tels que $x<y$ et $0\leq\lambda\leq1$.

La fonction *f* est convexe.

11.b.iii. Une CNS pour que *f* soit convexe sur *I* est que pour tout réel *a* de *I* la fonction Δ_a soit croissante sur l'ensemble $I-\{a\}$.

12.a. L'inégalité des trois pentes.

f est une fonction convexe sur l'intervalle *I*. D'après la question précédente, pour tout réel *u* de *I* la fonction Δ_u est croissante sur l'ensemble $I-\{u\}$.

Soit *a, b, c* trois réels de *I* tels que $a<b<c$.

* En se référant aux notations de la question précédente : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\Delta_a(b)$ et $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\Delta_a(c)$

Or, la fonction Δ_a est une fonction croissante sur l'ensemble $I-\{a\}$. Puisque $b<c$, $\Delta_a(b)\leq\Delta_a(c)$

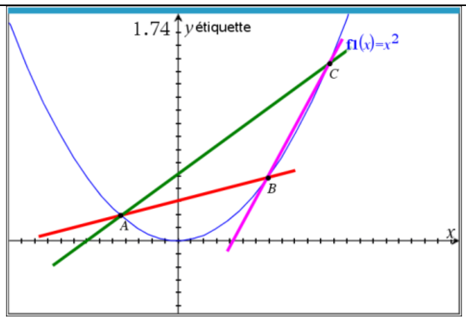
On obtient l'inégalité : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

** D'autre part : $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\Delta_c(b)$ et $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c}=\Delta_c(a)$

Or, la fonction Δ_c est une fonction croissante sur l'ensemble $I-\{c\}$. Puisque $a<b$, $\Delta_c(a)\leq\Delta_c(b)$

On obtient l'inégalité : $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

En fin de compte : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

12.b. Illustration graphique : « La pente de la droite verte est plus grande que celle de la droite rouge mais plus petite que celle de la droite magenta. »	

13.a. Théorème de la limite monotone

13.a.i. Si la fonction φ est majorée sur l'intervalle $]a\,;b[$, l'ensemble $\{\varphi(x),\, x\in\,]a\,;b[\}$ possède une borne supérieure **λ**. Il faut montrer que cette borne supérieure est la limite à gauche en *b*.

Soit ε un réel strictement positif. Compte tenu du statut de borne supérieure que possède λ, il existe un nombre réel *c* de l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $\lambda-\varepsilon<\varphi(c)\leq\lambda$.

La fonction φ étant par hypothèse croissante sur l'intervalle $]a\,;b[$, pour tout *x* tel que $c\leq x<b$: $\varphi(c)\leq\varphi(x)$ et en outre, compte tenu du statut de borne supérieure de λ, $\varphi(c)\leq\varphi(x)\leq\lambda$.

Posons $\alpha=b-c$. Par construction, il s'agit d'un réel strictement positif et on dispose de l'implication suivante : $b-\alpha\leq x<b\Rightarrow|\lambda-\varphi(x)|<\varepsilon$.

Ainsi, quel que soit ε strictement positif , il existe α strictement positif : $b-\alpha\leq x<b\Rightarrow|\lambda-\varphi(x)|<\varepsilon$. Ce qui prouve que λ est bien la limite à gauche de la fonction φ en *b*.

13.a.ii. Si la fonction φ est minorée sur l'intervalle $]a\,;b[$, elle possède une limite à droite en *a* qui est la borne inférieure de l'ensemble $\{\varphi(x),\, x\in\,]a\,;b[\}$.

13.b.i. Soit *a, b, c* trois réels de l'intervalle *I* tels que $a<b<c$.

La fonction $x\mapsto\Delta_b(x)=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ est croissante sur l'intervalle $]a\,;b[$ et elle est majorée par $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$. On peut lui appliquer le théorème de la limite monotone . Elle possède une limite à gauche en *b* qui, par définition du nombre dérivé à gauche en un point, est égale au nombre dérivé à gauche $f'_g(b)$ de *f* en *b*. Cette limite à gauche est inférieure ou égale au majorant $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

La fonction $x \mapsto \Delta_b(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ est croissante sur l'intervalle $]b\,;c[$ et elle est minorée par $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On peut lui appliquer le théorème de la limite monotone. Elle possède une limite à droite en b qui, par définition du nombre dérivé à droite en un point, est égale au nombre dérivé à droite $f'_d(b)$ de f en b. Cette limite à droite est supérieure ou égale au minorant $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Enfin, pour tout x et x' tels que $x < b < x'$, en raison de la croissance de la fonction Δ_b, $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \dfrac{f(x')-f(b)}{x'-b}$.

Par passage aux limites : $f'_g(b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \lim\limits_{\substack{x' \to b \\ x'>b}} \dfrac{f(x')-f(b)}{x'-b} = f'_d(b)$

En fin de compte les nombres dérivés à droite et à gauche en b vérifient : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

13.b.ii. La dérivabilité à droite (resp. à gauche) de f en b implique sa continuité à droite (resp. à gauche) en b. La fonction f étant continue à droite et à gauche en b, elle est continue tout court en b.

13.c. Il faut choisir un intervalle fermé et une non-continuité aux extrémités. Par exemple la fonction f définie sur $[0\,;1]$ qui est égale à 0 sur $]0\,;1[$ et à 1 en 0 et en 1.

14.a. Si f est dérivable en un point, ses nombres dérivés à droite et à gauche en ce point existent et sont tous deux égaux au nombre dérivé en ce point.

Soit $a < b$ appartenant à I.

On peut appliquer les inégalités de la question **13.b** de deux façons :

- D'une part : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) = f'(b)$ en utilisant à l'identique les notations de **13.b.**
- D'autre part : $f'(a) = f'_d(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ en utilisant l'inégalité de droite de la triple inégalité de **13.b** et avec les notations $b = a\,;c = b$

En réunissant les deux résultats : $f'(a) = f'_d(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) = f'(b)$.

On obtient en particulier le fait que pour tout *a* et *b* de *I* : $a < b \Rightarrow f'(a) < f'(b)$, la fonction dérivée de *f* est croissante sur *I*.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

14.b. Soit *a* un élément de *I* et *A* le point d'abscisse *a* de C_f. La tangente en *A* a pour équation : $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$.

D'après la question précédente :

Pour tout *x* > *a*, $f'(a) \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et donc $f(x) \geq f'(a)\times(x-a)+f(a)$. L'ordonnée du point *M* de C_f d'abscisse *x* est plus grande que l'ordonnée du point *N* de la tangente en *A* de même abscisse.

Pour tout *x* < *a*, $f'(a) \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et donc $f(x) \geq f'(a)\times(x-a)+f(a)$ également (changement de sens d'inégalité car $(x-a)$ est négatif. L'ordonnée du point *M* de C_f d'abscisse *x* est plus grande que l'ordonnée du point *N* de la tangente en *A* de même abscisse.

La courbe C_f est entièrement au dessus de la tangente en *A*, et cela quel que soit *A*. La courbe C_f est « au dessus de ses tangentes ».

15. *x* et *y* sont deux réels de *I* tels que *x* < *y*.

15.a. La fonction φ est dérivable car cocktail de fonctions dérivables et : $\phi'(t) = f(x)-f(y)-(x-y)f'(tx+(1-t)y)$

15.b. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable sur l'intervalle $[x\,;y]$, il existe un réel *z* appartenant à l'intervalle ouvert $]x\,;y[$ tel que : $f(x)-f(y) = (x-y)\times f'(z)$.

Du fait que *z* est strictement entre *x* et *y* il est un barycentre de *x* et de *y* affectés de coefficients α et β tous deux strictement positifs, $z = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}y$. Il existe un réel de l'intervalle $]0\,;1[$, le réel $\gamma = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ tel que $z = \gamma x + (1-\gamma)y$

On obtient ainsi qu'il existe $\gamma \in]0\,;1[$ tel que : $f(x)-f(y)=(x-y)\times f'(\gamma x+(1-\gamma)y)$ donc tel que

$$\phi'(t)=(x-y)\left[f'\left(\gamma x+(1-\gamma)y\right)-f'\left(tx+(1-t)y\right)\right]=(y-x)\left[f'\left(tx+(1-t)y\right)-f'\left(\gamma x+(1-\gamma)y\right)\right].$$

15.c. Notons que $tx+(1-t)y=t(x-y)+y$. Il s'agit d'une fonction affine de t dont le coefficient de t est un nombre strictement négatif, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une fonction affine décroissante.

$t<\gamma \Rightarrow tx+(1-t)y>\gamma x+(1-\gamma)y$ et $t>\gamma \Rightarrow tx+(1-t)y<\gamma x+(1-\gamma)y$

Vu que la dérivée de f est supposée être croissante :

$t<\gamma \Rightarrow (y-x)\left[f'\left(tx+(1-t)y\right)-f'\left(\gamma x+(1-\gamma)y\right)\right]\geq 0$ et $t>\gamma \Rightarrow (y-x)\left[f'\left(tx+(1-t)y\right)-f'\left(\gamma x+(1-\gamma)y\right)\right]\leq 0$

Donc, $\phi'(t)$ est positif sur $[0\,;\gamma]$ et négatif sur $[\gamma\,;1]$.

La fonction phi est croissante sur $[0\,;\gamma]$ et décroissante sur $[\gamma\,;1]$.

Elle admet par conséquent un maximum en γ.

15.d. Soit x et y deux réels de I tels que $x<y$.

La fonction phi s'annule en 0 et en 1. Puisqu'elle croit de 0 jusqu'à un maximum (forcément positif) et décroit ensuite de ce maximum à 0, la fonction phi est positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Quel que soit le réel t de cet intervalle : $\phi(t)=t.f(x)+(1-t)\,f(y)-f\left(t.x+(1-t)y\right)\geq 0$.

Soit : $t.f(x)+(1-t)\,f(y)\geq f\left(t.x+(1-t)y\right)$.

L'inégalité de convexité est vérifiée pour tout t de $[0\,;1]$ et cela quels que soient les réels x et y de I tels que $x<y$.

La fonction f est convexe.

16. On sait qu'une fonction dérivable sur un intervalle I est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur I. On vient de démontrer qu'une fonction dérivable est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

Une fonction f est deux fois dérivable sur I si et seulement si sa dérivée première est elle-même dérivable. Elle est convexe sur I si et seulement si cette dérivée première est croissante sur I, laquelle fonction est croissante sur I si et seulement si sa dérivée première, c'est-à-dire la dérivée seconde de f, est positive sur I.

V. Différentes inégalités

17.a. Soit quatre nombres strictement positifs conformément aux notations de l'énoncé.

La fonction *f* est, par hypothèse, une fonction concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'une part : $\psi(x_1, y_1)+\psi(x_2, y_2)=y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+y_2 f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$.

D'autre part : $\psi(x_1+x_2, y_1+y_2)=(y_1+y_2)\,f\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$.

Exprimons le nombre $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$ en tant que barycentre des deux nombres : $\frac{x_1}{y_1}$ et $\frac{x_2}{y_2}$:

$\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\lambda.\frac{x_1}{y_1}+(1-\lambda).\frac{x_2}{y_2}$ avec $\lambda=\frac{y_1}{y_1+y_2}$ (et par voie de conséquence : $1-\lambda=\frac{y_2}{y_1+y_2}$)

Puisque y_1 et y_2 sont tous deux strictement positifs, ce nombre λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. On peut appliquer l'inégalité de concavité que vérifie *f* avec précisément cette valeur λ.

La fonction *f* étant supposée concave sur $]0\,;\,+\infty[$, elle vérifie l'inégalité :

$f\left(\lambda\frac{x_1}{y_1}+(1-\lambda)\frac{x_2}{y_2}\right)\geq\lambda f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+(1-\lambda)\,f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ avec la valeur précise $\lambda=\frac{y_1}{y_1+y_2}$

Soit : $f\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)\geq\frac{y_1}{y_1+y_2}\,f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+\frac{y_2}{y_1+y_2}\,f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$.

On obtient ainsi en multipliant par le nombre strictement positif (y_1+y_2) l'inégalité :

$$(y_1+y_2)\,f\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)\geq y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+y_2 f\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Autrement dit : $\psi(x_1+x_2, y_1+y_2)\geq\psi(x_1, y_1)+\psi(x_2, y_2)$

17.b. Généralisons ...

L'inégalité à démontrer est triviale pour 2 nombres réels strictement positifs (x_1, y_1) et la question **17.a** la démontre pour quatre nombres.

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $2n$ nombres $x_1,...x_n, y_1,..., y_n$ strictement positifs où n est un certain entier strictement positif. C'est-à-dire supposons que $\psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k)$

Ajoutons-en deux de plus. Considérons $2n+2$ nombres strictement positifs $x_1,...x_n, x_{n+1}, y_1,..., y_n, y_{n+1}$.

Posons : $X_n = x_1 + ... + x_n$; $Y_n = y_1 + ... + y_n$. On applique l'inégalité **17.a** avec les quatre nombres strictement positifs $X_n, x_{n+1}, Y_n, y_{n+1}$: $\psi(X_n + x_{n+1}, Y_n + y_{n+1}) \geq \psi(X_n, Y_n) + \psi(x_{n+1}, y_{n+1})$

L'hypothèse de récurrence assume le fait que $\psi(X_n, Y_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k)$.

On obtient ainsi que : $\psi\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k, y_k)$

L'inégalité est héréditaire.

Elle est donc vérifiée quelle que soit la valeur de l'entier n strictement positif.

18.a. La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Sa dérivée première est la fonction définie par : $f'(t) = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p} t^{\frac{1-p}{p}}$

Sa dérivée seconde est la fonction définie par : $f''(t) = \frac{1-p}{p^2} t^{\frac{1}{p}-2}$.

Le réel p étant supposé strictement plus grand que 1, le nombre $1-p$ est strictement négatif et la dérivée seconde f'' est une fonction négative sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La fonction f est donc concave sur cet intervalle.

18.b. Examinons comment s'exprime la fonction psi ainsi que les différents ingrédients de l'inégalité (**) lorsque f est la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$.

- D'une part : $\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{x_k}{y_k}\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n} y_k^{\frac{1}{q}} x_k^{\frac{1}{p}}$.

- D'autre part : $\psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{p}}$.

On constate qu'il suffit d'appliquer l'inégalité (**) avec : $x_k = a_k^{\ p}$; $y_k = b_k^{\ q}$.

En effet : $\psi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ p}, \sum_{k=1}^{n} b_k^{\ q}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ q}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$

On obtient comme prévu par l'énoncé : $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ q}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$