CAPES 2021 épreuve 2 problème 1

Une correction personnelle de « la plupart » des questions ...

Partie B : Le cas *a* = 0

III.1. Lorsque $a = 0$, le terme de rang n ne figure pas dans la relation de récurrence, qui ne porte que sur les termes de rangs $n+1$; $n+2$; $n+3$. Il s'ensuit que l'initialisation d'un élément (u_n) de E_0 est indépendante de la valeur de u_0 et ne dépend que de la donnée de u_1 et u_2. Toute suite nulle à partir du rang 1, et dont le terme de rang 0 est fixé arbitrairement : $u_0 = \lambda$, où λ est un réel donné, vérifie la relation de récurrence **(1)** : une telle suite appartient à E_0. Il en est en particulier ainsi lorsque $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite nulle à partir du rang 1 et pour laquelle $\lambda = 1$

III.2. $\begin{cases} v_2 = u_2 - \lambda e_2 = u_2 \\ v_1 = u_1 - \lambda e_1 = u_1 \\ v_0 = u_0 - \lambda e_0 = u_0 - \lambda \end{cases}$ et par conséquent : $v_2 - 3v_1 + 2v_0 = u_2 - 3u_1 + 2(u_0 - \lambda)$.

La relation $v_2 - 3v_1 + 2v_0 = 0$ est vérifiée si et seulement si : $\lambda = \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2}$

Il existe cette unique valeur de λ pour laquelle la relation : $v_{n+2} = 3v_{n+1} + 2v_n$ est vérifiée au rang $n = 0$.

Pour tous les autres rangs $n \geq 1$: $v_{n+2} = u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n = 3v_{n+1} + 2v_n$.

La relation **(3)** est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$ et au rang $n = 0$: elle est donc vérifiée pour tout entier naturel n.

III.3. $\beta = v_1 - v_0 = u_1 - u_0 + \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2} = \dfrac{u_2 - u_1}{2}$ et $\alpha = 2v_0 - v_1 = 2u_0 - (u_2 - 3u_1 + 2u_0) - u_1 = 2u_1 - u_2$

III.4. Soit à démontrer que pour tout entier naturel n la propriété : « $v_n = \alpha + \beta 2^n$ ».

En vertu de la question **III.3.**, cette propriété est vérifiée aux deux rangs consécutifs 0 et 1. $\begin{cases} v_0 = \alpha + \beta \times 2^0 \\ v_1 = \alpha + \beta \times 2^1 \end{cases}$

Supposons que, pour un certain entier n, elle soit vérifiée aux deux rangs consécutifs n et $n+1$.

Alors, au rang $n+2$: $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n = 3(\alpha + \beta \times 2^{n+1}) - 2(\alpha + \beta \times 2^n) = (3\alpha - 2\alpha) + (6\beta - 2\beta) \times 2^n = \alpha + 4\beta \times 2^n$

On obtient : $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n = \alpha + \beta \times 2^{n+2}$

La propriété « $v_n = \alpha + \beta 2^n$ » est vérifiée au rang $n+2$, donc aux deux rangs consécutifs $n+1$ et $n+2$.

Ainsi la propriété est héréditaire, en ce sens que : $\begin{cases} v_n = \alpha + \beta \times 2^n \\ v_{n+1} = \alpha + \beta \times 2^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = \alpha + \beta \times 2^{n+1} \\ v_{n+2} = \alpha + \beta \times 2^{n+2} \end{cases}$

La propriété « $v_n = \alpha + \beta 2^n$ » est donc vérifiée pour tout entier naturel *n*.

III.5. Pour tout entier strictement positif *n* : $u_n = \alpha + \beta \times 2^n$ et au rang zéro :

$u_0 = v_0 + \dfrac{u_2 - 3u_1 + u_0}{2} = \alpha + \beta + \dfrac{u_2 - 3u_1 + u_0}{2} e_0$. Ainsi : $(u_n)_{n\in\mathrm{N}} = \alpha \times (1)_{n\in\mathrm{N}} + \beta \times (2^n)_{n\in\mathrm{N}} + \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2} \times (e_n)_{n\in\mathrm{N}}$

Compte tenu des valeurs de α et β: $(u_n)_{n\in\mathrm{N}} = (2u_1 - u_2) \times (1)_{n\in\mathrm{N}} + \dfrac{u_2 - u_1}{2} \times (2^n)_{n\in\mathrm{N}} + \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2} \times (e_n)_{n\in\mathrm{N}}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(1)_{n\in\mathrm{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathrm{N}}$; $(e_n)_{n\in\mathrm{N}}$

IV. Réciproquement, soit une suite combinaison linéaire des trois suites précédentes :

$(u_n)_{n\in\mathrm{N}} = \alpha \times (1)_{n\in\mathrm{N}} + \beta \times (2^n)_{n\in\mathrm{N}} + \gamma \times (e_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Le terme de rang zéro est le terme : $u_0 = \alpha + \beta + \gamma$

À partir du rang 1, pour tout entier *k* au moins égal à 1 : $u_k = \alpha + \beta \times 2^k$

Ainsi, les termes d'indices $n+1$; $n+2$; $n+3$ vérifient : $\begin{cases} u_{n+1} = \alpha + \beta \times 2^{n+1} \\ u_{n+2} = \alpha + \beta \times 2^{n+2} \\ u_{n+3} = \alpha + \beta \times 2^{n+3} \end{cases}$

Et donc pour tout entier naturel *n* : $u_{n+3} - 3u_{n+2} + 2u_{n+1} = \left(\alpha + \beta \times 2^{n+3}\right) - 3\left(\alpha + \beta \times 2^{n+2}\right) + 2\left(\alpha + \beta \times 2^{n+1}\right) = 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}} = \alpha \times (1)_{n\in\mathrm{N}} + \beta \times (2^n)_{n\in\mathrm{N}} + \gamma \times (e_n)_{n\in\mathrm{N}}$ vérifie la relation de récurrence **(2)** : elle appartient à E_0.

V.1. La question **III** a montré que E_0 était inclus dans l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites $(1)_{n\in\mathrm{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathrm{N}}$; $(e_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et la question **IV** a montré que l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites $(1)_{n\in\mathrm{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathrm{N}}$; $(e_n)_{n\in\mathrm{N}}$ était inclus dans E_0 : les deux ensembles sont égaux.

V.2. On a montré ainsi que E_0 était exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites $(1)_{n\in\mathrm{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathrm{N}}$; $(e_n)_{n\in\mathrm{N}}$ par la méthode de « double inclusion ».

Partie C : Le cas $a = 3$

VI.1. $AU_n = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$

VI.2. On ajoute membre à membre les n relations : $\begin{cases} U_n = AU_{n-1} \\ A\,U_{n-1} = A^2U_{n-2} \\ .... \\ A^{n-1}U_1 = A^nU_0 \end{cases}$. Par téléscopie, tous les termes intermédiaires, figurant de part et d'autre de l'égalité, s'éliminent et il reste : $U_n = A^nU_0$

VI.3. On délègue les calculs à une calculatrice. Il apparaît que P a un déterminant non nul, donc P est inversible, et que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale explicitée ci-contre.

Define $a = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $p = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *Terminé*

$\det(p)$ -2

p^{-1} $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$p^{-1}\cdot a\cdot p$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

©gilbertjulia2021

VI.4. Inversement : $A = P\,DP^{-1}$

Pour tout entier naturel n : $A^n = \underbrace{\left(P\,DP^{-1}\right)\left(P\,DP^{-1}\right)...\left(P\,DP^{-1}\right)}_{n\ \ fois} = PD\underbrace{\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D....\left(P^{-1}P\right)}_{(n-1)\ \ parenthésages}DP^{-1}$ en appliquant l'associativité de la multiplication des matrices. Par conséquent : $A^n = PD^nP^{-1}$

VI.5 et 6. Une calculatrice fournit les résultats : $\begin{cases} x = 3u_0 - \frac{5}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ y = -3u_0 + 4u_1 - u_2 \\ z = u_0 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \end{cases}$ qui sont, le constat est formel, des combinaisons linéaires des termes de rangs 0, 1 et 2.

La troisième composante du vecteur colonne que l'on obtient est l'expression de u_n en fonction de n et de ses premiers termes.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$

$p\cdot dn\cdot p^{-1}$ $\begin{bmatrix} \frac{9\cdot 3^n}{2} - 4\cdot 2^n + \frac{1}{2} & \frac{-27\cdot 3^n}{2} + 16\cdot 2^n - \frac{5}{2} & 9\cdot 3^n - 12\cdot 2^n + 3 \\ \frac{3\cdot 3^n}{2} - 2\cdot 2^n + \frac{1}{2} & \frac{-9\cdot 3^n}{2} + 8\cdot 2^n - \frac{5}{2} & 3\cdot 3^n - 6\cdot 2^n + 3 \\ \frac{3^n}{2} - 2^n + \frac{1}{2} & \frac{-3\cdot 3^n}{2} + 4\cdot 2^n - \frac{5}{2} & 3^n - 3\cdot 2^n + 3 \end{bmatrix}$

Define $an = p\cdot dn\cdot p^{-1}$ *Terminé*

$an\cdot\begin{bmatrix} u2 \\ u1 \\ u0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3^n\cdot\left(9\cdot u0 - \frac{27\cdot u1}{2} + \frac{9\cdot u2}{2}\right) + 2^n\cdot\left(-12\cdot u0 + 16\cdot u1 - 4\cdot u2\right) + 3\cdot u0 - \frac{5\cdot u1}{2} + \frac{u2}{2} \\ 3^n\cdot\left(3\cdot u0 - \frac{9\cdot u1}{2} + \frac{3\cdot u2}{2}\right) + 2^n\cdot\left(-6\cdot u0 + 8\cdot u1 - 2\cdot u2\right) + 3\cdot u0 - \frac{5\cdot u1}{2} + \frac{u2}{2} \\ 3^n\cdot\left(u0 - \frac{3\cdot u1}{2} + \frac{u2}{2}\right) + 2^n\cdot\left(-3\cdot u0 + 4\cdot u1 - u2\right) + 3\cdot u0 - \frac{5\cdot u1}{2} + \frac{u2}{2} \end{bmatrix}$

VII. Vérification calculatoire pénible. Dès lors que E_3 contient chacune des 3 suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, il contient toutes leurs combinaisons linéaires.

VIII. E_3 est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites (méthode de double inclusion).

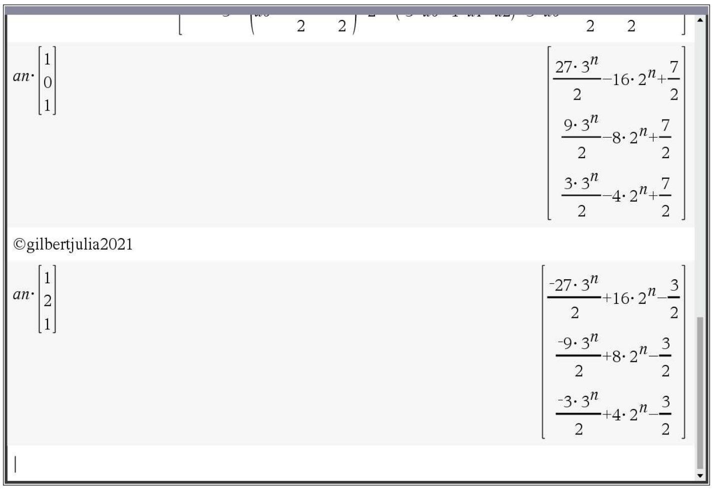
IX. Lorsque $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_n = \frac{3}{2} \times 3^n - 4 \times 2^n + \frac{7}{2}$

comme en atteste la copie d'écran ci-contre.

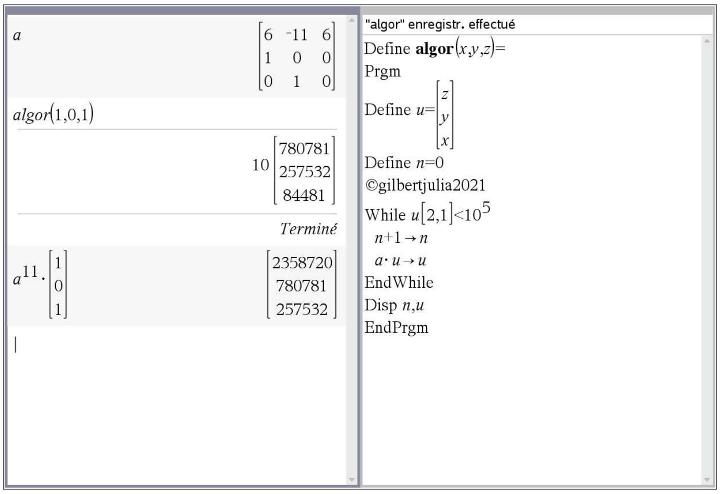
X. En factorisant, u_n apparaît comme le produit de $\frac{3}{2} \times 3^n$, suite géométrique divergeant vers plus l'infini, par une suite de limite 1 en plus l'infini :

$$u_n = \frac{3^{n+1}}{2} \times \left(1 - \frac{8}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{7}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini, comme le fait la suite $\left(\frac{3}{2} \times 3^n\right)$.

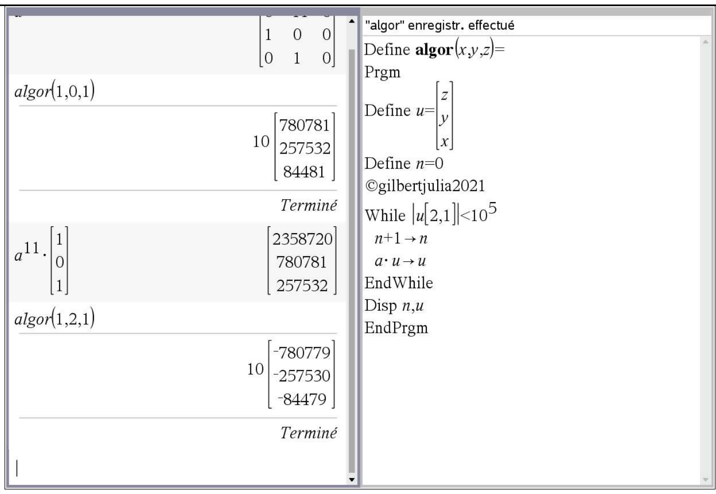


XI. Ci-contre, un algorithme écrit en langage TI-Nspire que le lecteur devra traduire en Python. On impose un test sur la deuxième composante du vecteur **u** de façon à avoir à l'affichage, en même temps, le dernier terme plus petit que 10^5 et le premier plus grand, ce terme étant u_{11} qui est égal à 257532.



XII. Lorsque $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_n = -\frac{3}{2} \times 3^n + 4 \times 2^n - \frac{3}{2}$

comme en atteste la copie d'écran précédent. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini

Il est nécessaire de corriger le test d'arrêt (mettre des valeurs absolues là où il n'y avait pas) pour déterminer le premier terme qui, en valeur absolue, dépasse 10^5.	

Partie D : Le cas général

XIII.1. L'ensemble des suites réelles est un **R**-espace vectoriel.

XIII.2. Considérons l'application f de l'ensemble des suites réelles sur lui-même définie par : $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{f} f(u)=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général :

$v_n = u_{n+3}-(a+3)u_{n+2}+(3a+2)u_{n+1}-2a.u_n$.

On vérifie facilement que f est linéaire et E_a en est le noyau. En tant que noyau d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des suites réelles, E_a est un sous-espace vectoriel de cet espace.

XIV.1. Vérification classique.

XIV.2. L'application θ est clairement surjective puisque les trois premiers termes d'une suite de E_a sont des réels que l'on peut choisir arbitrairement. Il reste à voir si elle est injective. Pour cela, cherchons son noyau.

Considérons une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_a telle que : $u_0=u_1=u_2=0$.

Cette donnée initialise pour le rang 0 la propriété suivante : « $u_k=0$ pour tout entier k tel que $0\le k\le n+2$ »

Soit désormais un entier $n\ge 0$ pour laquelle cette propriété est vérifiée. Cette propriété porte au moins sur trois rangs consécutifs et en particulier sur les trois derniers en jeu : $u_n=u_{n+1}=u_{n+2}=0$

Or, compte tenu de la relation de récurrence : $u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2a.u_n$. Donc : $u_{n+3} = 0$. C'est-à-dire que : « $u_k = 0$ pour tout entier k tel que $0 \le k \le n+2$ » implique « $u_k = 0$ pour tout entier k tel que $0 \le k \le n+3$ », la propriété en question est héréditaire.

Quel que soit l'entier naturel n : « $u_k = 0$ pour tout entier k tel que $0 \le k \le n+2$ », la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Le noyau de θ ne contenant que la suite nulle, θ est injective. Etant surjective et injective, elle est bijective.

XIV.3. E_a a la même dimension que son ensemble-image par θ, qui est $\mathbf{R}^3$. Cet espace est de dimension 3.

XV. Une base de E_0 est constituée par les images réciproques par θ des éléments de $\mathbf{R}^3$ suivants : $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ qui sont, respectivement, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ évoquées dans la **partie B**.

Une base de E_3 est constituée par les images réciproques par θ des éléments de $\mathbf{R}^3$ suivants : $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix} \right\}$ qui sont, respectivement, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$; $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ évoquées dans la **partie C**.

On peut, par exemple, retrouver les coordonnées d'une suite de E_0 telles qu'elles ont été calculées dans la **partie B**. Ci-contre, nous les retrouvons de deux façons différentes, en résolvant un système puis matriciellement :