

CAPES 2020 épreuve 1 parties E et F

Ce sujet porte sur les notions de « courbes de Bézier » et de « polynômes de Bernstein » qui font l'objet d'un thème d'étude que l'on trouvera dans la page « écrit du CAPES » de ce site. Les recoupements sont nombreux, aussi je ne propose une correction personnelle que de la fin du problème, les parties E et F. En outre, il m'arrive d'y digresser...

Éléments de correction.

Partie E : points de contrôle aux sommets d'un carré

NB. Nous désignerons par O le centre du carré. Nous supposons que le carré est direct, c'est-à-dire que l'angle $(\overline{OA}, \overline{OB})$ est un angle droit direct. C'est d'ailleurs le cas du carré utilisé dans la question **XVIII.3**.

XVII.1. *De façon générale :* Le sous-ensemble du groupe des isométries (respectivement du groupe des isométries directes) constitué par celles qui laissent globalement invariante une partie E non vide du plan (quelle qu'elle soit, un carré ou quoi que ce soit d'autre) contient au moins l'identité. La propriété « laisser globalement invariante la partie E » est stable par la composition des applications (si deux isométries, respectivement deux isométries directes, laissent globalement invariante la partie E , leur composée aussi) et par la symétrisation (si une isométrie laisse globalement invariante la partie E , son isométrie réciproque aussi). Ce sous-ensemble est un sous-groupe du groupe dont il est extrait.

En revanche, le fait que l'ensemble des isométries indirectes ne contient pas l'identité est rédhibitoire. Le sous-ensemble de celles qui laissent stable E n'est pas un groupe. Dans le présent contexte, le contre-exemple de la composée de la réflexion s_Δ par elle-même, composée égale à l'identité, suffirait à justifier que l'on n'a pas affaire à un groupe.

XVII.2. La réflexion s_Δ étant une isométrie indirecte, la composée d'une isométrie quelconque par s_Δ en change la signature (la composée par s_Δ d'une isométrie directe, respectivement indirecte, est une isométrie indirecte, respectivement directe). Ce qui justifie la définition de l'application F proposée par l'énoncé.

Définissons maintenant l'application G de I^- vers I^+ :
$$\begin{cases} I^- \rightarrow I^+ \\ g \mapsto s_\Delta \circ g \end{cases} .$$
 (G n'est pas la même que F car l'ensemble de départ n'est pas le même).

Par associativité de la loi de composition, pour toute isométrie f de I^+ : $G \circ G(f) = s_\Delta \circ (s_\Delta \circ f) = (s_\Delta \circ s_\Delta) \circ f = f$

L'application F admet une application réciproque, en l'occurrence G , ce qui justifie la bijectivité de F .

XVII.3. Considérons le couple de points (A, C) diagonalement opposés dans le carré. Compte tenu de la nécessité de conservation de distance par isométrie, ce couple de points a pour image un couple de points diagonalement opposés

dans le carré. Il y a quatre possibilités, et quatre seulement :
$$\left\{ \begin{array}{l} (A, C) \mapsto (A, C) \\ (A, C) \mapsto (C, A) \\ (A, C) \mapsto (B, D) \\ (A, C) \mapsto (D, B) \end{array} \right.$$
 . Or, dans le plan, la donnée des

images de deux points distincts caractérise une et une seule isométrie directe. Nous pouvons identifier quatre isométries, et quatre seulement. De haut en bas l'identité, la symétrie centrale s_O de centre le centre O du carré, la rotation r_1 de centre O et d'angle droit direct, la rotation r_2 de centre O et d'angle droit indirect.

Ce qui donne la table de composition suivante (ce groupe est commutatif).

	Id	s_O	r_1	r_2
Id	Id	s_O	r_1	r_2
s_O	s_O	Id	r_2	r_1
r_1	r_1	r_2	s_O	Id
r_2	r_2	r_1	Id	s_O

XVII.4. les quatre éléments de I^+ ont été précisés ci-dessus. L'ensemble I^- a lui aussi quatre éléments dont s_Δ , car il est image de I^+ par l'application bijective F .

Il reste à préciser quelles sont les composées par s_Δ des trois autres isométries de I^+ . Les images du couple (A, C)

permettent cette identification :
$$\left\{ \begin{array}{l} (A, C) \mapsto (C, A) \mapsto (B, D) \\ (A, C) \mapsto (B, D) \mapsto (C, A) \\ (A, C) \mapsto (D, B) \mapsto (A, C) \end{array} \right.$$
 ce qui donne les trois réflexions d'axes, dans cet ordre,

la médiatrice Δ' de $[AB]$, la diagonale (BD) et la diagonale (AC) .

Il est cependant intéressant pour la suite (**XVIII.2**) de lier chaque élément de ce groupe à une permutation des quatre points A, B, C, D . Nous définirons une permutation par la séquence des quatre images des points A, B, C, D dans cet ordre :

Isométrie	Id	s_O	r_1	r_2	s_Δ	$s_{\Delta'}$	s_{AC}	s_{BD}
Permutation	$ABCD$	$CDAB$	$BCDA$	$DABC$	$DCBA$	$BADC$	$ADCB$	$CBAD$

XVIII.1. Le groupe des permutations d'un ensemble de quatre éléments a 24 (la factorielle de 4) éléments.

XVIII.2. Commençons d'abord à justifier pourquoi certaines courbes de Bézier sont isométriques. Considérons une isométrie f conservant le carré et la courbe de Bézier déterminée par les quatre points $(f(A), f(B), f(C), f(D))$. En tant qu'application affine, f conserve les barycentres, c'est-à-dire que l'image du point courant M_t de la courbe de Bézier associée au quadruplet (A, B, C, D) est le barycentre des points $(f(A), f(B), f(C), f(D))$ affecté des mêmes coefficients. C'est donc le point courant de même paramètre t de la courbe de Bézier déterminée par les quatre points $(f(A), f(B), f(C), f(D))$. Cette courbe de Bézier déterminée par les quatre points $(f(A), f(B), f(C), f(D))$ est donc l'image de la courbe de Bézier associée au quadruplet (A, B, C, D) par l'isométrie f .

Il y a huit isométries qui conservent le carré, les huit permutations correspondantes sont indiquées dans le tableau **XVII.4**.

NB. Certaines, non contentes d'être « isométriques », sont identiques.

D'après les résultats sur les polynômes de Bernstein (voir problème dédié) on devrait avoir trouvé :

$$B_{3,0}(t) = (1-t)^3 ; B_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2 ; B_{3,2}(t) = 3t^2(1-t) ; B_{3,3}(t) = t^3 .$$

En remarquant que pour tout i compris entre 0 et 3 : $B_{3,3-i}(t) = B_{3,i}(1-t)$, le barycentre d'une séquence de quatre points pondérés par les polynômes de Bernstein en t est le même que le barycentre de la séquence des quatre même points en ordre inversé pondérés par les polynômes de Bernstein en $1-t$. Le point courant de l'une des courbes en t est le point courant de l'autre courbe en $1-t$. Les courbes de Bézier ainsi générées sont donc identiques. Ainsi par exemple, la séquence $DCBA$ génère la même courbe de Bézier que la séquence $ABCD$.

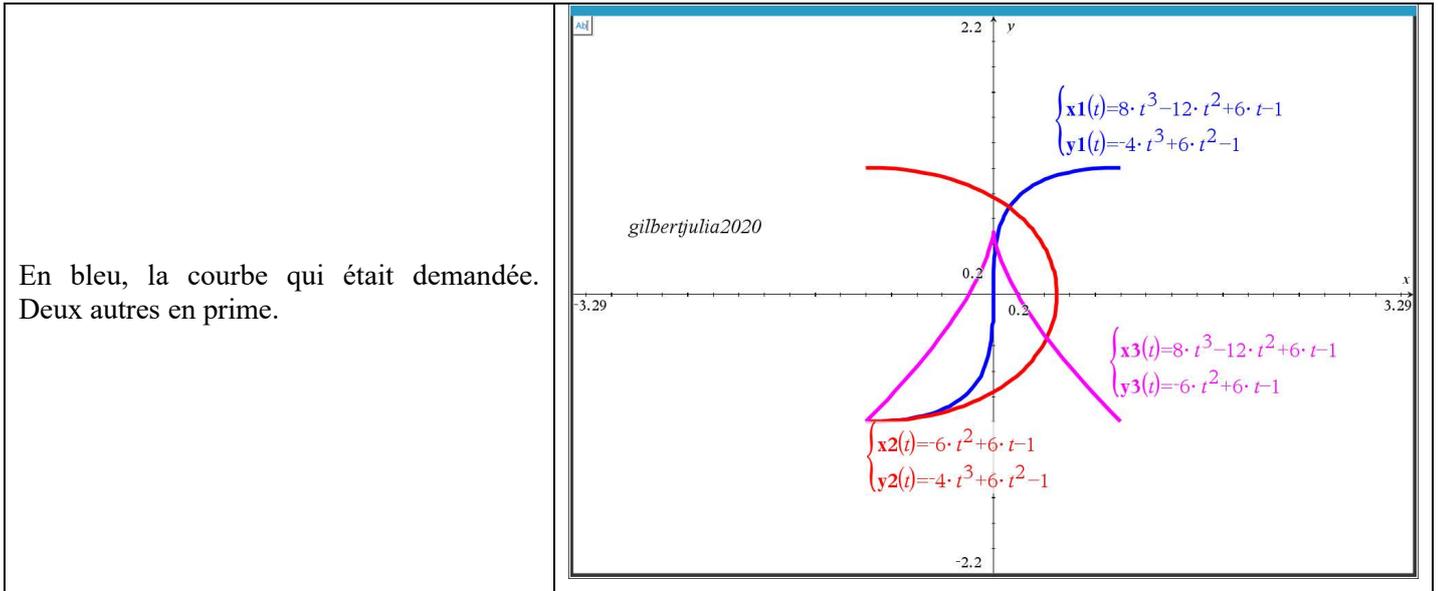
Or, nous reconnaissons dans la permutation « ordre inversé » les images des points A, B, C, D par la réflexion s_Δ . C'est la raison pour laquelle l'énoncé parachute cette réflexion s_Δ juste après.

XVIII.3. Nous venons de le dire sans qu'on nous le demande ... En remarquant que pour tout i compris entre 0 et 3 : $B_{3,3-i}(t) = B_{3,i}(1-t)$, le barycentre des points A, B, D, C pondérés par les polynômes de Bernstein en t est le même que le barycentre des points C, D, B, A (ordre inversé, c'est s_Δ qui fait ça) pondérés par les polynômes de Bernstein en $1-t$. Le point courant de l'une des courbes en t est le point courant de l'autre courbe en $1-t$. Les courbes de Bézier ainsi générées sont donc identiques.

Beaucoup plus efficace que le sirop Python, le logiciel TI-Nspire, ou une calculatrice Texas (et de même sans nul doute une Casio ou une parmi quelques concurrentes) homologuée au CAPES permet de traiter les questions suivantes en trois coups de cuillères à pot.

Ci-contre, une réponse recevable à **XVIII.3.b** et deux permutations, la permutation identique et la permutation $BCDA$, qui donnent des courbes de Bézier différentes de celle qui est étudiée.

<pre> Define a={-1,-1} Define b={1,-1} Define c={1,1} Define d={-1,1} bezier(a,b,d,c,t) </pre>	<pre> Terminé Terminé Terminé Terminé {8·t³-12·t²+6·t-1, 4·t³+6·t²-1} </pre>	<pre> beziere 2/2 Define beziere(u,v,w,r,t)= Func Return (1-t)³·u+3·t·(1-t)²·v+3·t²·(1-t)·w+t³·r ©gilbertjulia2020 EndFunc </pre>
<pre> bezier(c,d,b,a,t) </pre>	<pre> {-8·t³+12·t²-6·t+1, 4·t³-6·t²+1} </pre>	
<p>©Le constat que les deux affichages sont identiques est une preuve irréfutable de la question XVIII.3.a.</p>		
<pre> bezier(a,b,c,d,t) bezier(b,c,d,a,t) </pre>	<pre> {-6·t²+6·t-1, 4·t³+6·t²-1} {4·t³-6·t²+1, 6·t²+6·t-1} </pre>	
<p>©Ci-dessus deux permutations qui donnent des résultats différents.</p>		



Nous pouvons classer les 24 permutations en trois groupes dont les éléments se correspondent entre eux par une isométrie du carré :

Groupe 1 (celui de la courbe Γ_2)	$ABCD$	$CDAB$	$BCDA$	$DABC$	$DCBA$	$BADC$	$ADCB$	$CBAD$
Groupe 2 (celui de la courbe Γ_1)	$ABDC$	$DCAB$	$BDCA$	$CABD$	$CDBA$	$BACD$	$ACDB$	$DBAC$

Le groupe 3, celui de la courbe Γ_3 , contient les huit autres permutations. Par exemple, $ACBD$ (A et D sont invariants, B et C sont permutés) ou $ADBC$ appartiennent à ce groupe.

XVIII.7. Dès lors que tous les carrés sont semblables les uns aux autres et qu'une similitude, en tant qu'application affine, conserve les barycentres...

Partie F : raccordements de courbes de Bézier

XIX. Dans une partie précédente, il a été établi que les vecteurs dérivés en P_0 et en P_n , extrémités d'une courbe de Bézier, sont respectivement $n.\overline{P_0P_1}$ et $-n.\overline{P_nP_{n-1}}$.

On se propose de raccorder deux courbes de Bézier comme l'indique l'énoncé, sachant que P_n et Q_0 sont confondus et que P_{n-1} et P_n sont distincts de même que Q_0 et Q_1 .

Des vecteurs directeurs des demi-tangentes au point de raccordement $P_n = Q_0$ sont à gauche le vecteur dérivé $-n.\overline{P_nP_{n-1}}$ et à droite le vecteur dérivé $m.\overline{Q_0Q_1}$, car nous sommes assurés, selon les hypothèses, qu'ils sont tous deux non nuls.

XIX.1. D'après l'énoncé, une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe soit lisse au point de raccordement est que les vecteurs dérivés à gauche et à droite aient une même direction.

NB. Cette définition me paraît un peu curieuse car, selon elle, une courbe qui aurait un point de rebroussement serait lisse. J'aurais tendance à dire que les vecteurs dérivés à gauche et à droite doivent avoir une même direction *et être de même sens*. Conformons-nous à l'énoncé ...

La courbe est lisse au point de raccordement si et seulement si, selon l'énoncé, les vecteurs $-n.\overline{P_nP_{n-1}}$ et $m.\overline{Q_0Q_1}$ ont une même direction, c'est-à-dire si et seulement si les deux vecteurs non nuls $\overline{P_nP_{n-1}}$ et $\overline{Q_0Q_1}$ sont colinéaires, ou encore si et seulement si les points distincts P_{n-1} , $P_n = Q_0$ et Q_1 sont des points alignés.

Si nous ajoutons la condition « *et être de même sens* » nous dirions qu'une condition nécessaire et suffisante est qu'il existe un réel k strictement positif tel que : $-n.\overline{P_nP_{n-1}} = k m.\overline{Q_0Q_1}$, condition équivalente à l'existence d'un réel λ strictement négatif tel que : $\overline{P_nP_{n-1}} = \lambda.\overline{Q_0Q_1}$ (ce réel est : $\lambda = -\frac{km}{n}$), et équivalente à l'alignement P_{n-1} , $P_n = Q_0$ et Q_1 dans cet ordre, le point $P_n = Q_0$ appartenant strictement au segment $[P_{n-1}Q_1]$.

XIX.2. Compte tenu de la composition avec les fonctions $2t$ et $2t-1$, un facteur 2 va intervenir dans le calcul des vecteurs dérivés.

Les vecteurs dérivés en P_n et en Q_0 sont, dans ce nouveau paramétrage, respectivement, $-2n.\overline{P_nP_{n-1}}$ et $2m.\overline{Q_0Q_1}$ (au point de raccordement de paramètre $\frac{1}{2}$)

Une condition nécessaire et suffisante pour que le paramétrage soit de classe C^1 est que les vecteurs dérivés à droite et à gauche du point de raccordement soient des vecteurs égaux, c'est-à-dire que : $-2n.\overline{P_nP_{n-1}} = 2m.\overline{Q_0Q_1}$ ce qui permet de situer le point Q_1 par rapport aux points P_{n-1} et $P_n = Q_0$ l'aide d'une relation vectorielle : $-\frac{n}{m}.\overline{P_nP_{n-1}} = \overline{P_nQ_1}$

XX. Dans l'exemple à étudier, $P_3 = D(-1; 1)$; $P_4 = C(1; 1)$; $\overline{P_4P_3} = \overline{CD} = -2\vec{i}$. D'un côté du point C , nous avons une courbe de Bézier à 4 points de contrôle et de l'autre une courbe de Bézier à 3 points de contrôle.

La position du point $Q_1 = E$ est déterminée par la relation vectorielle : $-\frac{4}{3}\overline{CD} = \overline{CE} = -\frac{8}{3}\vec{i}$, c'est-à-dire que E a pour coordonnées : $\left(\frac{11}{3}; 1\right)$

D'autre part, le vecteur dérivé en l'extrémité $Q_2 = F$ est dans ce contexte le vecteur $-3\overline{FE}$. Le point F appartenant à l'axe Ox , ses coordonnées sont de la forme $(a; 0)$ et celles de $-3\overline{FE}$ sont $(11-3a; 3)$. La courbe « a pour pente 1 » au point de raccordement si le déterminant $\begin{vmatrix} 11-3a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ est nul, c'est-à-dire si $a = \frac{8}{3}$.

Dans ce contexte, le point courant de la courbe de Bézier aux trois points de contrôle C, E et F a pour coordonnées :

$$t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t)^2 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3}t^2 + 2t + \frac{8}{3} \\ 2t - t^2 \end{pmatrix}$$

Compte tenu du paramétrage « admis », nous obtenons : $-\frac{11}{3}(2t-1)^2 + 2(2t-1) + \frac{8}{3} = -\frac{44}{3}t^2 + \frac{56}{3}t - 3$ et $2(2t-1)^2 - (2t-1)^2 = -4t^2 + 8t - 3$

Des calculs utiles

```

Define u(t)=-11*(2*t-1)^2/3+2*(2*t-1)+8/3
Define v(t)=2*(2*t-1)-(2*t-1)^2
expand(u(t))
expand(v(t))
x1(2*t)
y1(2*t)
    
```

Terminé

Terminé

$-\frac{44}{3}t^2 + \frac{56}{3}t - 3$

$-4t^2 + 8t - 3$

$64t^3 - 48t^2 + 12t - 1$

$-32t^3 + 24t^2 - 1$

©gilbertjulia2020

Et les deux courbes raccordées.

