# CAPES 2020 épreuve 2 problème 1

*Une correction personnelle de « beaucoup » de questions mais pas toutes ...*

## Partie A : Des problèmes

*Pas tous traités*

**II. Problème 2 : Evolution en pourcentage**

**II.1.** Désignons par $P_0$ le prix du baril de pétrole brut en octobre (valeur initiale).

Si le prix a baissé de 19 % entre octobre et novembre, on obtient le prix en novembre en appliquant le coefficient multiplicateur $(1-0{,}19=0{,}81)$ au prix initial : le prix de novembre est : $P_1=0{,}81\times P_0$

Si le prix a baissé de 12 % entre novembre et décembre, on obtient le prix en décembre en appliquant le coefficient multiplicateur $(1-0{,}12=0{,}88)$ au prix de novembre : le prix de décembre est : $P_3=0{,}88P_1=0{,}88\times 0{,}81\times P_0=0{,}7128\times P_0$

Le coefficient multiplicateur moyen est $\sqrt{0{,}7128}=0{,}844$ à 0,001 près ; ce coefficient multiplicateur correspond à une baisse moyenne mensuelle de 15,6 %.

De même, entre novembre et janvier, le prix a été multiplié par 0,88 puis par 1,04 donc par 0,9152.

Le coefficient multiplicateur moyen est $\sqrt{0{,}9152}=0{,}957$ à 0,001 près, ce qui correspond à une baisse moyenne mensuelle de 4,3 %.

**II.2.** Le coefficient multiplicateur mensuel moyen est la moyenne géométrique des deux coefficients multiplicateurs.

**III. Fonte de deux plaques**

**III.1.** Le rayon $R$ est tel que : $2R^2=R_1^{\,2}+R_2^{\,2}$ c'est-à-dire tel que : $R=\sqrt{\dfrac{R_1^{\,2}+R_2^{\,2}}{2}}$ (en l'occurrence $R=10\sqrt{17}=41{,}2$ à 0,1 près).

**III.2.** Le rayon $R$ est la moyenne quadratique des deux rayons.

**V. Double pesée**

**V.1.** D'après la double pesée : $\begin{cases} m\times l = x\times l' \\ x\times l = m'\times l' \end{cases}$ et donc : $x^2\times ll' = m\times m'\times ll'$ puis : $x=\sqrt{m\times m'}$

**V.2.** $x$ est la moyenne géométrique des deux masses.

## Partie B : Toutes les moyennes

**IX.1.** $OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{HA+HB}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique de $a$ et de $b$.

Puisque $H$ est sur le segment $[OA]$ distinct de ses extrémités : $0<a<b$, ce qui nous permet de dire que : $OH = OA - HA = \dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2}$

**IX.2.** Relation métrique connue dans le triangle rectangle $ABM$ dont $MH$ est la hauteur issue du sommet de l'angle droit : $MH^2 = HA\times HB = a\times b$, $MH$ est la moyenne géométrique de $a$ et $b$.

**IX.3 et 4.** Le triangle $GOM$ est rectangle en $O$. Ses côtés de l'angle droit mesurent : $OM = \dfrac{a+b}{2}$ et: $OG = OH = \dfrac{b-a}{2}$. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle $GOM$ :

$MG^2 = OM^2 + OG^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ et donc : $MG = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, c'est la moyenne quadratique de $a$ et de $b$.

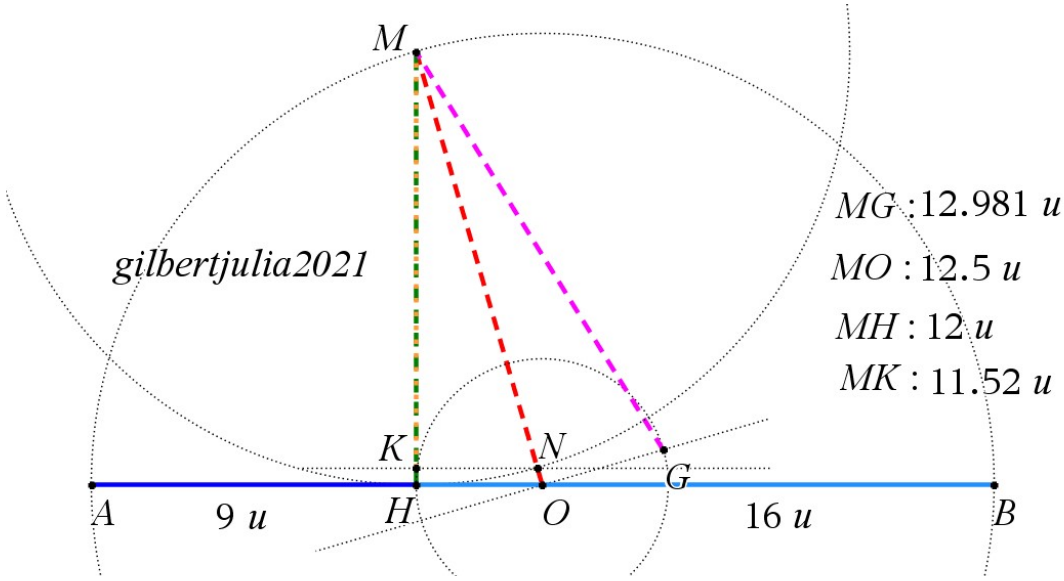
**IX.5.** On peut appliquer le théorème de Thalès dans la configuration du triangle $OMH$ où $(KN)$ est une parallèle au côté $[OH]$ : $\dfrac{MK}{MH} = \dfrac{MN}{MO}$

Or, d'après les résultats précédents : $MH = MN = \sqrt{a\times b}$ et $MO = \dfrac{a+b}{2}$

Donc : $MK=\dfrac{MH\times MN}{MO}=\dfrac{\sqrt{ab}\times\sqrt{ab}}{\dfrac{a+b}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

On peut en déduire la relation : $\dfrac{2}{MK}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $MK$ est la moyenne géométrique de $a$ et de $b$.

*Une figure avec a* = 9 *et b* = 16 :




**IX.6.** Dans le triangle $OGM$ rectangle en $O$, $MG$ est l'hypoténuse et $MO$ est la mesure d'un côté de l'angle droit, donc $MG > MO$ .

Dans le triangle $OHM$ rectangle en $H$, $MO$ est l'hypoténuse et $MH$ est la mesure d'un côté de l'angle droit, donc $MG > MH$ .

$\dfrac{MK}{MH}=\dfrac{MN}{MO}=\dfrac{MH}{MO}<1$ donc $MK < MH$

Ce qui donne comme classement : $q > m > g > h$

## Partie C : Moyenne associée à une fonction

**X.1.** Le nombre $\dfrac{F(a)+F(b)}{2}$ étant la moyenne arithmétique des deux nombres $F(a)$ et $F(b)$ est une valeur intermédiaire, située dans l'intervalle $\left[F(a)\,;F(b)\right]$. La fonction $F$ étant supposée strictement monotone, les réels $F(a)$ et $F(b)$ sont distincts et $\dfrac{F(a)+F(b)}{2}$ est situé strictement entre les deux.

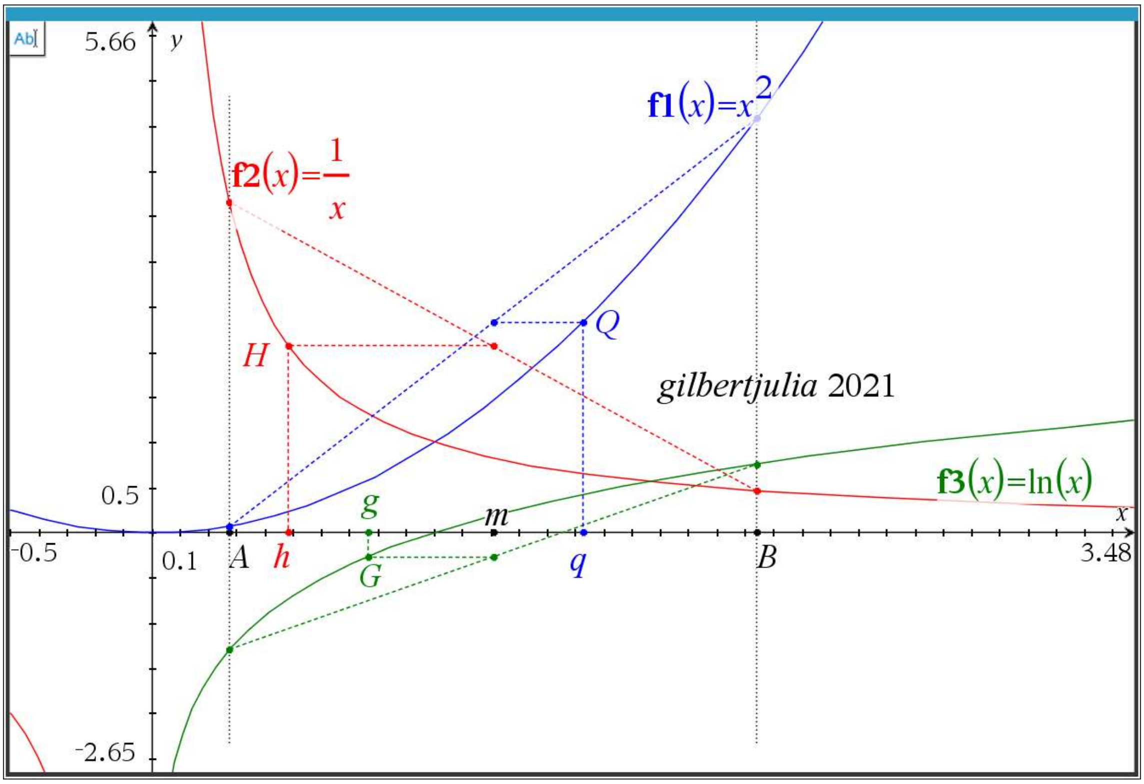
La fonction $F$ étant supposée continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique : $F$ prend une fois et une seule toute valeur de l'intervalle image $\left[F(a)\,;F(b)\right]$.

En particulier il existe un réel et un seul $\alpha_F$ appartenant à l'intervalle ouvert $]a\,;b[$ dont l'image par $F$ est la valeur strictement intermédiaire $\dfrac{F(a)+F(b)}{2}$.

On devrait avoir : $F_1\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{F_1(a)+F_1(b)}{2}$ , $F_2\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)=\dfrac{F_2(a)+F_2(b)}{2}$ , $F_3\left(\sqrt{ab}\right)=\dfrac{F_3(a)+F_3(b)}{2}$ et $F_4\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)=\dfrac{F_4(a)+F_4(b)}{2}$

- La fonction $F_1$ est clairement la fonction identique.
- $F_2$ est la fonction carrée car : $\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$
- $F_3$ est la fonction logarithme népérien car : $\ln\left(\sqrt{ab}\right)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$
- $F_4$ est la fonction inverse car : $\dfrac{1}{\dfrac{2ab}{a+b}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

**X.2.** Représentation (sur un même graphique, c'est mieux, car on « voit » la position relative des moyennes)




## Partie D : Moyenne de *n* nombres positifs

**XI.1.** Considérons le cas $n=2$ :

D'une part : $2\sum_{i=1}^{2} a_i^2 = 2\left(a_1^2 + a_2^2\right)$

De l'autre : $\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 2}\left(a_i - a_j\right)^2 = \left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(a_1 - a_2\right)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2\right) + \left(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2\right) = 2a_1^2 + 2a_2^2$ .

Les deux expressions sont égales quels que soient $a_1$ et $a_2$ réels positifs, ce qui initialise la formule à démontrer au rang $n=2$ .

Pour $(n+1)$ réels positifs, avec $n$ au moins égal à 2, considérons l'expression : $\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n+1}\left(a_i - a_j\right)^2$ .

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = a_{n+1}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1}\right)$$

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(a_i-a_j\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-a_{n+1}\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-a_{n+1}\right)^2$$ autrement dit :

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(a_i-a_j\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}-2\sum_{i=1}^{n}a_i\,a_{n+1}+n\,a_{n+1}^{\,2}$$

De sorte que : $\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(a_i-a_j\right)^2=\left(n+1\right)a_{n+1}^{\,2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}+\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2\right]$

Supposons que pour $n$ nombres réels positifs l'hypothèse de récurrence soit vérifiée, c'est-à-dire que : $\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2\right]=n\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$.

Nous obtenons : $\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(a_i-a_j\right)^2=\left(n+1\right)a_{n+1}^{\,2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}+n\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}=\left(n+1\right)\sum_{i=1}^{n+1}a_i^{\,2}$.

Si la formule à démontrer est vraie pour $n$ réels positifs, alors elle l'est pour $\left(n+1\right)$ réels positifs : elle est héréditaire.

Elle est donc vraie pour tout entier $n$ au moins égal à 2.

**XI.2 et 3.** On peut écrire cette formule ainsi : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2$ c'est-à-dire :

$$q^2=m^2+\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2$$

Dans cette formule, $\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)^2$ est un réel positif ou nul, qui ne s'annule que si tous les réels $a_i$ sont égaux.

On en déduit $q^2\ge m^2$, ce qui implique que $q\ge m$ puisque $q$ et $m$ sont des réels positifs, l'égalité n'ayant lieu que si tous les réels $a_i$ sont égaux.

**XII et XIII.** *Je passe, déjà vu ailleurs.*

## Partie E : Une bribe seulement ...

**XVII.** L'évènement « obtenir au moins une fois un six » dans une expérience consistant à lancer quatre fois un dé a pour probabilité $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}$

L'écart avec $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{23}{1296}$

On est amené à appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchebychev avec : $\varepsilon=\frac{23}{1296}$, donc à chercher les valeurs de $n$ telles que : $\frac{1}{4n\varepsilon^2}\leq 0,05$, c'est-à-dire telles que : $\frac{5}{\varepsilon^2}\leq n$, ce qui amène à choisir $n$ au moins égal à 15876

L'évènement « obtenir un double six » dans une expérience consistant à lancer deux dés a pour probabilité $\frac{1}{36}$

Le nombre de fois que l'on obtient un double six dans une expérience consistant à lancer 24 fois deux dés est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B\left(24\ ;\ \frac{1}{36}\right)$

L'évènement « obtenir au moins une fois un double six » dans une expérience consistant à lancer 24 fois deux dés a pour probabilité $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0,4914$ à $10^{-4}$ près.

L'écart avec $\frac{1}{2}$ est voisin de 0,0086.

On est amené à appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchebychev avec : $\varepsilon=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}-\frac{1}{2}$, ce qui amène de façon analogue à choisir $n$ tel que $\frac{5}{\varepsilon^2}\leq n$ donc au moins égal à 67666.

**XVII.8.** Le chevalier de Méré était certes un joueur invétéré.

Cependant, les calculs ci-dessus illustrent surtout le fait que l'inégalité de Bienaymé Tchebychev a un intérêt pratique quasiment nul, les majorations étant exorbitantes. Le chevalier de Méré ne s'en est pas servi ...