CAPES Maths 2019, épreuve 2 problème 2 : Somme des cancres et suites de Farey

Partie A : Somme des cancres

I. **M**ontrer, par double inclusion, que les deux paires d'entiers $\{a,\, b\}$ et $\{a,\, b+n\,a\}$ ont le même ensemble de diviseurs communs.

II. Je conseille de démontrer un lemme qui servira plusieurs fois dans la partie « suites de Farey » :

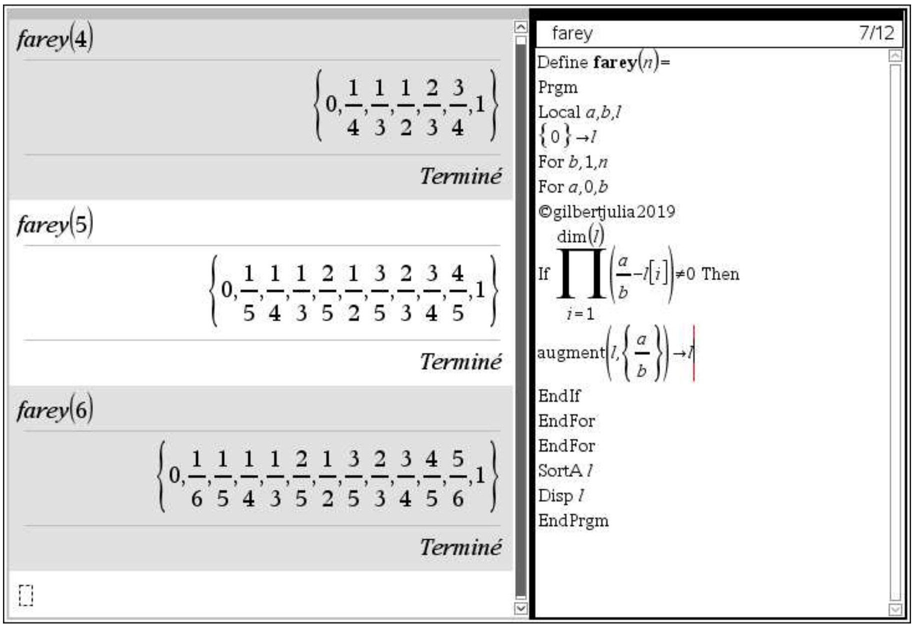
Lemme. Soit $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $b\,c-a\,d=1$. Alors, $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible en exploitant : $b\,c-a\,d=1 \Rightarrow b(a+c)-a(b+d)=1$

(En général, ce n'est pas le cas …)

VI. Se méfier de « l'indication » qui, à mon avis, envoie dans un mur. Chercher plutôt du côté des applications des déterminants. Tant pis pour cette sombre histoire d'aires de rectangles et triangles.

Partie B : Suites de Farey

VII. Le programme **farey** résout la question.



XI. Il s'agirait plutôt d'une application de $\mathbf{Q}^+$ vers **N×N*** sinon, le dénominateur d'une fraction représentative d'un rationnel ne pouvant être nul, la question **XI.2** perd toute espèce de signification.

XII. Montrer l'égalité proposée par récurrence.

La liste F_{n+1} est formée de tous les éléments de la liste F_n et des éléments dont le dénominateur de la FFI est exactement égal à $n+1$ qui, eux, sont dans F_{n+1} mais non pas dans F_n.

Ces éléments sont les rationnels $\dfrac{a}{n+1}$ tels que a et $n+1$ sont premiers entre eux.

Partie C : Eléments consécutifs d'une suite de Farey

XIII. 3. Entre deux nombres qui sont dans F_{n+1} mais non pas dans F_n, il y a au moins, strictement, un élément de F_n. Par conséquent, deux tels nombres ne peuvent pas être consécutifs dans F_{n+1}.
Au moins un de deux éléments consécutifs de F_{n+1} est dans F_n.

XIV.2. D'après ce que nous venons de voir dans **XIII**, si x et y sont consécutifs dans F_{n+1} et si x appartient à F_n, nous avons deux cas à envisager à propos de y :
Premier cas : y appartient lui aussi à F_n.
Deuxième cas : y appartient à F_{n+1} mais n'appartient pas à F_n.

<table>
<tr>
<td>Cette copie d'écran montre la suite de Farey d'ordre 10. Nous vérifions que les produits en croix « $bc-ad$ » relatifs à deux termes consécutifs de cette suite sont toujours égal à 1.

Ensuite, nous considérons la suite de Farey d'ordre 6 et nous cherchons quelle est la première fraction irréductible qui va s'intercaler entre deux termes consécutifs.
Par exemple, $\frac{2}{11}$ est la première à s'intercaler entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{7}$ est la première à s'intercaler entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$.</td>
<td>$\left\{0,\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},1\right\}\to f$
$\left\{0,\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},1\right\}$
seq(getDenom(f[i])· getNum(f[i+1])−getDenom(f[i+1])· getNum(f[i]),i,1,dim(f)−1)
{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}
©gilbertjulia2019
f $\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},1\right\}$
seq(sc(f[i],f[i+1]),i,1,dim(f)−1) $\left\{\frac{1}{7},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{2}{7},\frac{3}{8},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{8},\frac{5}{7},\frac{7}{9},\frac{9}{11},\frac{6}{7}\right\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>La fonction sc définie sur la partie droite de l'écran est la fonction « somme des cancres », elle s'applique à des couples de rationnels. Sur la partie gauche, nous avons généré à titre d'exemple la suite F_7, puis la suite obtenue en calculant la somme des cancres des termes de F_7 d'indices i et $i+2$ (c'est-à-dire séparés l'un de l'autre par un et un seul terme de F_7).
Nous constatons que la suite obtenue est celle donnant les « intermédiaires ».</td>
<td>7, 11, 9, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 9, 11, 7
farey(2)
$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$
Terminé
farey(7)
$\left\{0,\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},1\right\}$
Terminé
seq(sc(f[i],f[i+2]),i,1,dim(f)−2)
$\left\{\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}\right\}$
©gilbertjulia2019

sc 1/1
Define sc(x,y)= $\dfrac{\text{getNum}(x)+\text{getNum}(y)}{\text{getDenom}(x)+\text{getDenom}(y)}$</td>
</tr>
</table>