CAPES Maths 2019, épreuve 2 problème 2 : Somme des cancres et suites de Farey

Partie A : Somme des cancres

I. Nous allons montrer, par double inclusion, que les deux paires d'entiers $\{a, b\}$ et $\{a, b+na\}$ ont le même ensemble de diviseurs communs. Le résultat étant trivial si $n=0$, nous supposerons que n est un entier non nul.

Soit d un diviseur commun à a et à b. Il existe deux entiers relatifs a' et b' : $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

$b+na = d\,b' + n\,d\,a' = d\,(b'+n\,a')$. L'entier d est diviseur de $b+na$, il est donc diviseur commun de a et de $b+na$. L'ensemble des diviseurs communs de la paire $\{a, b\}$ est inclus dans l'ensemble des diviseurs communs de la paire $\{a, b+na\}$.

Soit d un diviseur commun à a et à $b+na$. Il existe deux entiers relatifs a' et c' : $a = d\,a'$ et $b+na = d\,c'$.

$b = (b+na) - na = d\,c' - n\,d\,a' = d\,(c' - n\,a')$. L'entier d est diviseur de b, il est donc diviseur commun de a et de b. L'ensemble des diviseurs communs de la paire $\{a, b+na\}$ $\{a, b\}$ est inclus dans l'ensemble des diviseurs communs de la paire $\{a, b\}$.

Les deux paires d'entiers $\{a, b\}$ et $\{a, b+na\}$ ont le même ensemble de diviseurs communs. En particulier, le plus grand élément de cet ensemble est, en même temps, le PGCD de a et de b et le PGCD de a et de $b+na$.

II.1. La somme de deux entiers positifs est un entier positif, strictement positif si l'un des deux au moins est strictement positif, et le quotient d'un entier positif par un autre strictement positif est un rationnel positif.

2. Non. Contre-exemple : $\dfrac{5}{9} \oplus \dfrac{1}{3} = \dfrac{5+1}{9+3} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

Cependant, nous allons démontrer un lemme qui servira plusieurs fois dans la partie « suites de Farey » :

Lemme. Soit $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $bc - ad = 1$. Alors, $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

En effet : $bc - ad = ba + bc - ab - ad = b(a+c) - a(b+d)$ (nous avons fait qu'ajouter et retrancher le nombre ab). Donc : $bc - ad = 1 \Rightarrow b(a+c) - a(b+d) = 1$.

(De même, nous aurions eu : $bc - ad = bc + cd - ad - cd = c(b+d) - d(a+c) = 1$)

Les entiers $(a+c)$ et $(b+d)$ vérifient une égalité de Bézout, ils sont premiers entre eux. Dans ce cas, $\frac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible, la FFI de $x \oplus y$ est $\frac{a+c}{b+d}$. Retenons cette propriété …

Remarquons au passage que, en notant $\frac{u}{v}$ cette FFI, $bu - av = cv - du = 1$

III.1. Non : $x \oplus 0 = \frac{a}{b} \oplus \frac{0}{1} = \frac{a}{b+1} \neq x$ (sauf si $x = 0$)

4. Non. Contre-exemple : $\frac{3}{11} \oplus \left(\frac{5}{9} \oplus \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{11} \oplus \frac{1}{2} = \frac{4}{13}$ tandis que : $\left(\frac{3}{11} \oplus \frac{5}{9}\right) \oplus \frac{1}{3} = \frac{8}{20} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$

5. Oui. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ les FFI de x et y. Alors : $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}$. Par ailleurs, les FFI de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{c}$ et $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{x \oplus y}$.

6. Oui. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ les FFI de x et y. D'après la question de cours, celles de $(n+x)$ et de $(n+y)$ sont $\frac{a+nb}{b}$ et $\frac{c+nd}{d}$. De ce fait : $(n+x) \oplus (n+y) = \frac{(a+nb)+(c+nd)}{b+d} = \frac{a+c}{b+d} + n = (x \oplus y) + n$

IV. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ les FFI de x et y. Les entiers a et c sont positifs, b et d le sont strictement.

1. $x \oplus y = x \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bc = ad$. Les entiers b et d étant non nuls, $bc = ad \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow y = x$

2. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad - bc < 0$

D'une part, $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$ et d'autre part : $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{d(b+d)} < 0$

Donc, $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$**,** la somme des cancres de deux fractions positives distinctes s'intercale strictement entre les deux.

V.1. Le point M_x a pour coordonnées $(b,\ a)$, le point M_y a pour coordonnées $(d,\ c)$ et le milieu I du segment $[M_x M_y]$ a pour coordonnées $(b+d,\ a+c)$.

Soit $\frac{u}{v}$ la FFI de $\frac{a+c}{b+d}$. Si Δ désigne le PGCD de $(a+c)$ et de $(b+d)$, $\begin{cases} a+c=\Delta u \\ b+d=\Delta v \end{cases}$, les entiers u et v étant premiers entre eux.

Le point $M_{x\oplus y}$ a pour coordonnées $(u,\ v)$ et en outre $\overrightarrow{OI}=\Delta\,\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$, ce qui prouve l'alignement des trois points $O,\ I,\ M_{x\oplus y}$.

V.2. La droite $(OM_{x\oplus y})$ est la médiane issue de O du triangle en question.

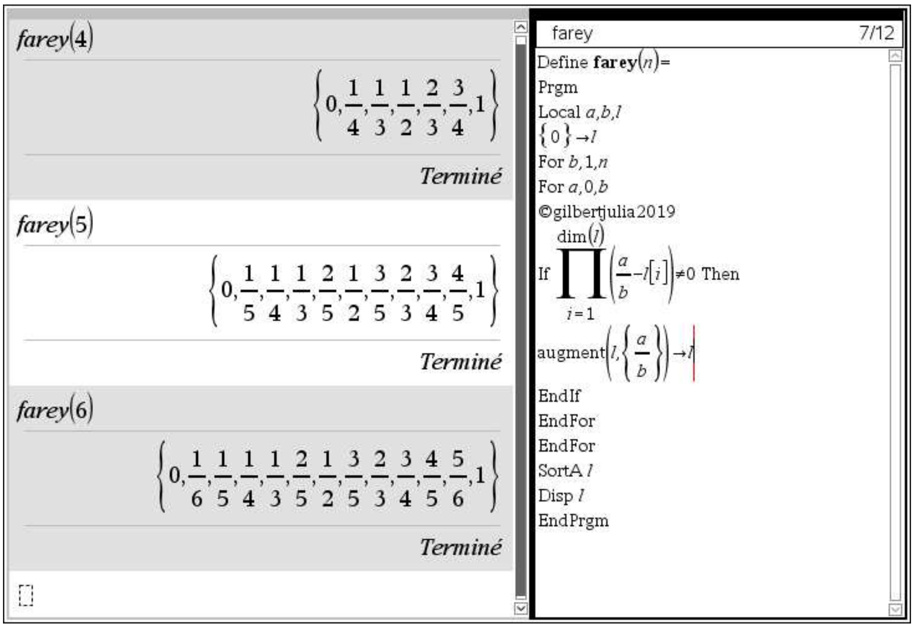
VI. Si l'on se souvient de la formule $Aire(ABC)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$, point n'est besoin de faire appel à des considérations d'aires tarabiscotées : $Aire\left(OM_xM_y\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM_x},\overrightarrow{OM_y}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|a\,d-b\,c|$

Sous les hypothèses de cette question, $a\,d-b\,c>0$, l'emploi d'une valeur absolue n'est pas nécessaire.

Etrange indication qui détourne les candidats (particulièrement ceux pourvus d'un chouïa de savoirs sur l'application des déterminants) d'une résolution simple et commode pour les envoyer dans un mur.

Partie B : Suites de Farey

VII. Le programme **farey** résout la question.



VIII. Un sens est évident, résultant de la définition.

Réciproquement, soit $x=\dfrac{a}{b}$ avec $0\le a\le b\le n$ et b non nul. Si Δ est le PGCD de a et de b, il existe a' et b' premiers entre eux : $a=\Delta a'$; $b=\Delta b'$ et $x=\dfrac{a'}{b'}$ (c'est sa FFI). Ces entiers a' et b' étant diviseurs positifs de a et b, ils sont inférieurs ou égaux , respectivement, à ces deux nombres : $0\le a'\le b'\le n$.

Donc $0\le x\le 1$ et le dénominateur de la FFI de x est inférieur ou égal à n : le rationnel x figure dans la suite de Farey F_n.

IX. $0\le a\le b\le n \Rightarrow 0\le a\le b\le n+1$. Or $x\in F_n \Leftrightarrow \left(\exists(a,b)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^*,\ 0\le a\le b\le n \ \ et\ \ x=\dfrac{a}{b}\right)$.

Donc $x\in F_n \Rightarrow x\in F_{n+1}$

X. Soit $x=\dfrac{a}{b}$ un rationnel compris entre 0 et 1. Alors $1-x=\dfrac{b-a}{b}$ est lui aussi compris entre 0 et 1.

En outre, $0\le a\le b\le n \Rightarrow 0\le b-a\le b\le n$. Donc $\dfrac{a}{b}\in F_n \Rightarrow_{gj} \dfrac{b-a}{b}\in F_n$. Autrement dit, $x\in F_n \Rightarrow 1-x\in F_n$

XI. Il s'agirait plutôt d'une application de $\mathbf{Q}^+$ vers **N×N*** sinon, le dénominateur d'une fraction représentative d'un rationnel ne pouvant être nul, la question **XI.2** perd toute espèce de signification.

- Deux rationnels ayant la même FFI sont égaux : θ est injective.
- Les couples non premiers entre eux de **N×N*** ne sont pas des FFI : θ n'est pas surjective.
- La question **VIII** montre que $x\in F_n-\{0\}\Leftrightarrow \left(\exists(a,b)\in\{1,\dots,n\}^2,\ a\le b\le\ et\ x=\dfrac{a}{b}\right)$, et en conséquence $x\in F_n-\{0\}\Rightarrow \theta(x)\in\{1,\dots,n\}^2$

- Puisque θ est injective, F_n a le même cardinal que son image par θ, incluse dans $\{1,..., n\}^2 \cup \{(0, 1)\}$, ensemble qui, avec l'élément ajouté, possède n^2+1 éléments. Lorsque $n=1$, $F_n=\{0, 1\}$, même cardinal que $\{(1, 1) ; (0, 1)\}$ (égal à 2). Lorsque $n>1$, au moins l'élément (n, n) n'a pas d'antécédent par θ, l'image par θ de F_n est strictement incluse dans $\{1,..., n\}^2 \cup \{(1, 0)\}$ donc a un cardinal strictement inférieur à n^2+1. Ainsi dans ce cas $card(F_n) < n^2+1$

XII. Montrons l'égalité proposée par récurrence.

Elle est exacte au rang 1 car $f_1=2$.

Vérifions son éventuelle hérédité. Supposons-la exacte à un rang $n \geq 1$. C'est-à-dire supposons qu'à ce rang :

$$f_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\phi(k)$$

La liste F_{n+1} est formée de tous les éléments de la liste F_n et des éléments dont le dénominateur de la FFI est exactement égal à $n+1$ qui, eux, sont dans F_{n+1} mais non pas dans F_n.

Ces éléments sont les rationnels $\frac{a}{n+1}$ tels que a et $n+1$ sont premiers entre eux. Le nombre de ces éléments est l'indicatrice d'Euler de $n+1$.

Ainsi : $f_{n+1} = f_n + \phi(n+1) \underset{gilbertjulia}{=} \left(1+\sum_{k=1}^{n}\phi(k)\right)+\phi(n+1) = 1+\sum_{k=1}^{n+1}\phi(k)$.

La formule proposée pour exprimer f_n est héréditaire.

Pour tout entier n strictement positif : $f_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\phi(k)$

Partie C : Eléments consécutifs d'une suite de Farey

XIII. 1 et 2. Nous avons eu l'occasion de signaler que les éléments qui sont dans F_{n+1} mais non pas dans F_n étaient les nombres dont la FFI est de la forme $\frac{k}{n+1}$ avec k et $n+1$ premiers entre eux . L'entier k étant premier avec $n+1$, il est **strictement** compris entre 0 et $n+1$.

Deux termes consécutifs qui seraient dans F_{n+1} mais non pas dans F_n seraient, s'il en existe, deux rationnels qui s'écriraient $x=\frac{k}{n+1}$; $y=\frac{k+1}{n+1}$ avec $0<k$ et $k+1<n+1$. L'entier k est tel $0<k<n$.
(De plus, k et $k+1$ sont tous deux premiers avec $n+1$).

2. Pour $0<k<n$, comparons les deux nombres $\frac{k}{n+1}$; $\frac{k+1}{n+1}$ avec $\frac{k}{n}$.

D'une part $\frac{k}{n+1}<\frac{k}{n}$ car deux fractions positives de même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs. D'autre part $\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n}=\frac{n-k}{n(n+1)}>0$ donc $\frac{k+1}{n+1}>\frac{k}{n}$.

Le nombre rationnel $\frac{k}{n}$ s'intercale strictement entre les deux : $\frac{k}{n+1}<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n+1}$.

3. Entre deux nombres qui sont dans F_{n+1} mais non pas dans F_n, il y a au moins, strictement, un élément de F_n. Par conséquent, deux tels nombres ne peuvent pas être consécutifs dans F_{n+1}.
Au moins un de deux éléments consécutifs de F_{n+1} est dans F_n.

XIV.1. $F_1=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}$ Or : $\frac{0}{1}\oplus\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$ qui est la première nouvelle fraction apparaissant dans F_2.

XIV.2. D'après ce que nous venons de voir dans **XIII**, si x et y sont consécutifs dans F_{n+1} et si x appartient à F_n, nous avons deux cas à envisager à propos de y :

XIV.2.a. Premier cas : y appartient lui aussi à F_n.
Dans ce cas, les deux termes consécutifs dans F_{n+1} sont aussi consécutifs dans F_n. La propriété à établir résulte naturellement de l'hypothèse de récurrence.

XIV.2.b. Deuxième cas : y appartient à F_{n+1} mais n'appartient pas à F_n.

Dans ce cas : $x=\frac{a}{b}$, $0\le a<b\le n$ avec a et b premiers entre eux tandis que : $y=\frac{c}{d}$ avec c et d premiers entre eux et en outre, si $y\in F_{n+1}$ et $y\notin F_n$, alors $d=n+1$ (mais cela ne semble pas avoir grande importance).

Soit $z=\frac{r}{s}$, $0<r<s\le n$ avec r et s premiers entre eux, le successeur de x dans F_n .

D'après l'hypothèse de récurrence, puisque x et z sont consécutifs dans F_n , $b\,r - a\,s = 1$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{r}{s}$ est la première fraction irréductible qui apparaît entre x et z dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n.

Notons que $\frac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible d'après le lemme que nous avons démontré en **A.II.2**. Notons aussi que d'après la **partie A.IV.2** : $x = \frac{a}{b} < x \oplus z = \frac{a+r}{b+s} < z = \frac{r}{s}$, ce qui justifie que la fraction irréductible $x \oplus z = \frac{a+r}{b+s}$ s'intercale entre x et z.

XIV.2.c. Dans ce deuxième cas, le successeur y de x dans F_{n+1} n'étant pas dans F_n, l'hypothèse $z \le y$ est exclue, sinon ce serait z, élément de F_n, qui serait le successeur de x dans F_{n+1}. Nécessairement, $y < z$, et y est intercalé entre x et z.
Or, la suite de Farey F_{n+1} est celle qui succède immédiatement à la suite de Farey F_n. Les éléments de F_{n+1} qui n'appartiennent pas à F_n sont les premiers à s'intercaler parmi certains éléments de F_n. En particulier, si y s'intercale entre x et z, elle est la première à le faire. Par unicité de ce « premier élément » : $y = x \oplus z$.

XIV.2.d. Par unicité de la FFI d'un rationnel : $c = a + r,\ d = b + s$

XIV.2.e. D'une part : $\frac{c}{d} = \frac{a+r}{b+s} \Leftrightarrow b\,c - a\,d = r\,d - s\,c$.
D'autre part : $b\,c - a\,d = b(a+r) - a(b+s) = b\,r - a\,s = 1$, et d'après ce que nous avons vu dans la **question XIV.2.b**, $b\,r - a\,s = 1$. En conséquence : $b\,c - a\,d = r\,d - s\,c = 1$

XIV.2.f. Soit $\frac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre $> n+1$: $0 \le \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \le 1$ avec p et q premiers entre eux et $q > n+1$

Ces inégalités étant strictes : $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} \Rightarrow 0 < b\,p - a\,q = v$ et $\frac{p}{q} < \frac{c}{d} \Rightarrow 0 < c\,q - d\,p = u$, les nombres $v = b\,p - a\,q$ et $u = c\,q - d\,p$ sont deux entiers strictement positifs.

$\begin{cases} b\,p - a\,q = v \\ c\,q - d\,p = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{a\,u + c\,v}{b\,c - a\,d} \\ q = \dfrac{b\,u + d\,v}{b\,c - a\,d} \end{cases}$. Mais nous avons vu que $b\,c - a\,d = 1$. Il reste : $\begin{cases} p = a\,u + c\,v \\ q = b\,u + d\,v \end{cases}$

Puisque $u \ge 1$ et $v \ge 1$, $b\,u + d\,v \ge b + d$ et $a\,u + c\,v \ge a + c$. Le nombre $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}$ a un dénominateur inférieur ou égal à q.

Nous avons vu aussi que $d = n+1$ et par conséquent $b + d \ge n+2$. Enfin, d'après le lemme démontré en **A.IV.2**, $\frac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible, c'est la FFI de $x \oplus y$.

XIV.2.g Le nombre $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d}$ a un dénominateur strictement supérieur à $n+1$ et inférieur ou égal à q.

Mais si ce dénominateur était strictement inférieur à q, la première fraction irréductible apparaissant entre x et y dans une suite d'ordre strictement supérieur à $n+1$ ne serait pas $\dfrac{p}{q}$. Par unicité de ce « premier élément », $b+d=q$ ce qui implique que $u=v=1$ et que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

XIV.3. Les questions **XIV.2.a** puis les questions **XIV.2.b** et suivantes traitent deux cas de figure possibles. Dans ces deux cas de deux termes consécutifs dans F_{n+1}, $x=\dfrac{a}{b}$ et $y=\dfrac{c}{d}$ sont tels $bc-ad=1$ et $x \oplus y$ est la première fraction irréductible d'une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n à s'intercaler.
Il resterait pour boucler tous les cas de figure à examiner ce qu'il se passe lorsque $x \in F_{n+1} - F_n$ et $y \in F_n$. Mêmes conclusions que dans **XIV.b** et suivantes (on introduirait le prédécesseur z de y dans F_n et on aurait $bc-ad=-1$).
La propriété **(P_n)** est héréditaire, elle a été initialisée au rang 1, elle est vraie pour tout entier strictement positif.

XV.1. Vu depuis belle lurette dans la correction.

XV.2. Cette question a un sens si la suite possède au moins trois éléments distincts, c'est-à-dire si $n \geq 2$. On vérifie facilement que tout fonctionne au rang 2. Remarquons aussi que pour les trois nombres $\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{1}$, les deux produits en croix sont non seulement égaux, mais en outre égaux à 1.

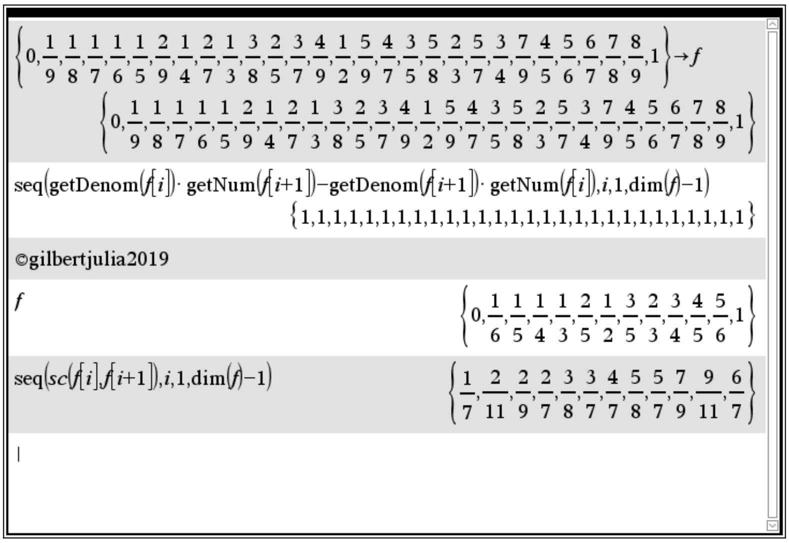
Supposons que tout fonctionne au rang n. Ajoutons même l'hypothèse que tous les produits en croix de deux termes consécutifs sont non seulement égaux, mais en outre égaux à 1.

Considérons la suite F_{n+1} et trois éléments consécutifs. Ou bien ils sont déjà consécutifs dans F_n et la propriété découle naturellement de l'hypothèse de récurrence. Ou bien il y a un « petit nouveau » encadré par deux termes de F_n. La question **XIV** a montré qu'il était la somme des cancres de ceux qui l'encadraient.
On peut même ajouter, en utilisant le « Remarquons que … » du lemme que les nouveaux produits en croix de deux termes consécutifs générés sont aussi égaux à 1.

Les propriétés en question sont héréditaires. Elles sont vraies pour toutes les suites de Farey d'ordre supérieur ou égal à 2.

Cette copie d'écran montre la suite de Farey d'ordre 10. Nous vérifions que les produits en croix « $bc-ad$ » relatifs à deux termes consécutifs de cette suite sont toujours égal à 1.

Ensuite, nous considérons la suite de Farey d'ordre 6 et nous cherchons quelle est la première fraction irréductible qui va s'intercaler entre deux termes consécutifs. Par exemple, $\frac{2}{11}$ est la première à s'intercaler entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{7}$ est la première à s'intercaler entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$.



La fonction **sc** définie sur la partie droite de l'écran est la fonction « somme des cancres », elle s'applique à des couples de rationnels. Sur la partie gauche, nous avons généré à titre d'exemple la suite F_7 , puis la suite obtenue en calculant la somme des cancres des termes de F_7 d'indices i et $i+2$ (c'est-à-dire séparés l'un de l'autre par un et un seul terme de F_7). Nous constatons que la suite obtenue est celle donnant les « intermédiaires ».