CAPES Maths 2018, épreuve 1 : Ecriture d'un entier en base deux, nombres dyadiques, …

Voici quelques éléments de correction de l'épreuve 1. Je néglige intentionnellement la première partie. Chacun trouvera l'irrationalité de ***e*** *ou des séries convergeant vers* $\ln 2$ *dans un grand nombre de manuels de Terminale S.*

Partie B : Ecriture d'un entier en base deux

IV. On suppose que $N=\sum_{k=0}^{n-1} d_k\, 2^k$ avec $\forall k\in\{0\,;\ldots;n-2\} : d_k\in\{0\,;\,1\}$ et $d_{n-1}=1$ où n est un entier au moins égal à 2.

IV.1. Puisque $d_{n-1}=1$, $N=2^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} d_k\, 2^k$

Pour chaque entier k appartenant à $\{0\,;\ldots;n-2\}$: $0\le d_k\le 1$. En tenant compte de cet encadrement pour chaque terme de la somme : $2^{n-1}\le N \underset{gj}{\le} 2^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} 2^k = 2^{n-1}+\left(2^{n-1}-1\right)=2^n-1$.

On obtient la double inégalité $2^{n-1}\le N<2^n$, d'où l'on peut déduire l'inégalité : $n-1\le \frac{\ln N}{\ln 2}<N$ qui caractérise l'entier n : $n\underset{gj}{=} E\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)$.

De la sorte, si N admet un deuxième développement de même nature, $N=\sum_{k=0}^{p-1} e_k\, 2^k$ avec $\forall k\in\{0\,;\ldots;p-2\} : e_k\in\{0\,;\,1\}$ et $e_{p-1}=1$, alors $p=n$.

On suppose dans la question suivante qu'il en est ainsi.

IV.2. *Unicité du développement (sous réserve d'existence)*

$$N=d_0+\sum_{k=1}^{n-1} d_k\, 2^k \underset{gjulia}{=} d_0+2\left(\sum_{k=1}^{n-1} d_k\, 2^{k-1}\right) \text{ avec } 0\le d_0<2\,.$$

Sont en évidence les deux ingrédients de l'unique écriture en division euclidienne par 2 de l'entier N : le reste d_0 et le quotient $q_1=\sum_{k=1}^{n-1} d_k\, 2^{k-1}$ de cette division. De la sorte, si N admet un autre développement de même nature, $N=\sum_{k=0}^{n-1} e_k\, 2^k$, alors $e_0=d_0$.

Plus généralement, pour $j=2,\ldots,n-1$: $N=2^j\left(\sum_{k=j}^{n-1} d_k\, 2^{k-j}\right)\underset{gjulia}{} +\sum_{k=0}^{j-1} d_k\, 2^k$ avec $0\le\sum_{k=0}^{j-1} d_k\, 2^k\le\sum_{k=0}^{j-1} 2^k=2^j-1$. Ainsi $0\le\sum_{k=0}^{j-1} d_k\, 2^k<2^j$, cet entier $\sum_{k=0}^{j-1} d_k\, 2^k$ est le reste de la division euclidienne de N par 2^j. On obtient un résultat analogue avec le deuxième développement.

D'après l'unicité des ingrédients de cette division euclidienne :
pour tout $j = 2,\dots,n-1$: $\sum_{k=0}^{j-1} d_k\, 2^k = \sum_{k=0}^{j-1} e_k\, 2^k$.

Dans ce cas, en considérant « en cascade » ces relations :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\left.\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d_0 = e_0 \\ 2d_1 + d_0 = 2e_1 + e_0 \end{array}\right\} \Rightarrow d_0 = e_0 \; ; \; d_1 = e_1 \\ 2^2 d_2 + 2d_1 + d_0 = 2^2 e_2 + 2e_1 + e_0 \end{array}\right\} \Rightarrow d_0 = e_0 \; ; \; d_1 = e_1 \; ; \; d_2 = e_2 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Rightarrow \dots\right. \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} d_k\, 2^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} e_k\, 2^k \end{array}\right\} \Rightarrow \forall j \in \{0,\dots n-1\} : d_j = e_j$$

Les deux développements sont nécessairement identiques. La suite $(d_0,\dots,d_{n-1})$, si elle existe, est déterminée de manière unique.

IV.3. *Existence d'un tel développement*
Soit $y_0 = N$ et $(y_1,\, d_0)$ le quotient et le reste de sa division euclidienne par 2. Alors : $y_0 = 2y_1 + d_0$,

$0 \le d_0 < 2$ et puisque N est un entier ≥ 2 , $N > y_1 \ge 1$.

Tant que $y_k \ge 2$, la suite de divisions euclidiennes des quotients par 2 donne : $y_k = 2\, y_{k+1} + d_k$, $0 \le d_k < 2$,

$y_k > y_{k+1} \ge 1$ et :

$$N = d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + \dots + 2^{k-1} d_{k-1} + 2^k y_k = d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + \dots + 2^{k-1} d_{k-1} + 2^k (d_k + 2\, y_{k+1})$$

La suite (y_k) est une suite strictement décroissante d'entiers ≥ 1. Une telle suite est nécessairement une suite finie. Il existe un rang où la condition $y_k \ge 2$ n'est plus vérifiée. Si cela se produit à la n-ième division, alors nécessairement $y_{n-1} = 1$ (sinon, on pourrait procéder à une division de plus)
La division euclidienne suivante s'écrit : $1 = y_{n-1} = 0 \times 2 + 1$. Ainsi $y_n = 0$; $d_{n-1} = 1$ et désormais : $y_k = d_k = 0$ pour $k \ge n$.
L'écriture $N = d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + \dots + 2^{n-2} d_{n-2} + 2^{n-1} d_{n-1}$ est définitive, la question d'existence d'un tel développement est réglée.

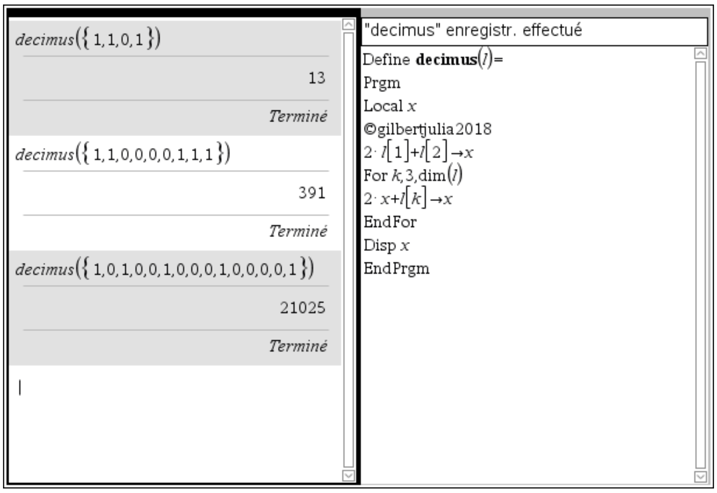
Le programme **binette** affiche l'entier x qui, en numération décimale, a la même écriture que l'entier N en base deux.

```
binette(13)
                    1101
                 Terminé
binette(391)
               110000111
                 Terminé
```

```
"binette" enregistr. effectué
Define binette(n)=
Prgm
Local x,k
0 →x
0 →k
©gilbertjulia2018
While n>0
mod(n,2)· 10^k+x →x
k+1 →k
floor(n/2) →n
EndWhile
```

VI. *Je n'ai aucune idée des algorithmes utilisés par un automate pour calculer une puissance et, d'autre part, « à la main », je ne s'amuse pas à multiplier ni par 0 ni par 1 … Je miserais une demi roupie sur* $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ *et* $2n-2$ *respectivement mais pas un kopek de plus. On peut conjecturer que dans le cas de Horner le nombre d'opérations est du premier degré en n alors que ce nombre serait du second degré en n avec la méthode « naïve ». Point barre.*

Le programme **decimus** affiche l'écriture en numération décimale d'un entier dont on connaît la liste *l* des chiffres dans la numération en base deux.



Partie C : Nombres dyadiques

VII. Quel que soit l'entier relatif a : $a=\dfrac{a}{2^0}$ est un nombre dyadique. Donc $\mathbf{Z}\subset\mathbf{D_2}$. L'inclusion est stricte puisque par exemple $\dfrac{1}{2}$ est un nombre dyadique et n'est pas un entier relatif.

Tout nombre dyadique est un quotient de deux nombres entiers et de plus le dénominateur n'admettant que 2 comme facteur premier, un nombre dyadique est un cas particulier de nombre décimal. Donc $\mathbf{D_2}\subset\mathbf{D_{10}}\subset\mathbf{Q}$ en notant ici $\mathbf{D_{10}}$ l'ensemble des nombres décimaux.
L'inclusion est stricte car par exemple $\dfrac{1}{5}$ (ce choix me paraît meilleur que $\dfrac{1}{3}$) est un rationnel, et même un décimal, qui n'est pas un nombre dyadique : l'hypothèse qu'il existe deux entiers a et p tels que $\dfrac{a}{2^p}=\dfrac{1}{5}$ est absurde car elle impliquerait $5a=2^p$; puisque 5 divise le premier membre, il diviserait le deuxième et, puisque 5 est un nombre premier, il diviserait l'un des facteurs de $2^p=2\times\ldots\times 2$, ce qui est contradictoire. Les inclusions $\mathbf{D_2}\subset\mathbf{D_{10}}\subset\mathbf{Q}$ sont des inclusions strictes.

VIII. Supposons qu'il existe une suite conforme aux hypothèses indiquées : $x=\sum_{k=0}^{n}a_k\,2^{-k}$. Vu que les coefficients a_k $(1\leq k\leq n)$ sont tous positifs et inférieurs ou égaux à 1, et que le coefficient d'indice n est exactement égal à 1 : $a_0+2^{-n}\leq x\leq a_0+\sum_{k=1}^{n}2^{-k}=a_0+\left(1-2^{-n}\right)$.

Il en résulte que $a_0<x<a_0+1$ c'est-à-dire que : $a_0=E(x)$, ce qui détermine a_0 de manière unique.

S'il existe une autre suite de même nature : $x=\sum_{k=0}^{p}b_k\,2^{-k}$, alors $b_0=a_0$

Dans ces conditions : $\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{-k}=\sum_{k=1}^{p}b_k\,2^{-k}$. $2^n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{-k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{n-k}\right)=\sum_{k=1}^{p}b_k\,2^{n-k}$

On peut supposer sans diminuer la généralité que $p\geq n$. Alors : $2^n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{-k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{n-k}\right)=\sum_{k=1}^{p}b_k\,2^{n-k}$.

$\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{n-k}$ est entier, $\sum_{k=1}^{p}b_k\,2^{n-k}$ doit l'être aussi ce qui implique $p\leq n$ et finalement $p=n$.

En considérant l'entier $\sum_{k=1}^{n}a_k\,2^{n-k}$, on obtient deux développements suivant les puissances de deux qui, nécessairement, doivent être identiques : $b_j=a_j$ pour tous les indices. Un développement dyadique, s'il existe, est unique.

IX. Soit $x=\dfrac{a}{2^p}$ un nombre dyadique non entier. D'après la partie précédente, l'entier a s'écrit dans la base deux : $a=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,2^k$ et $x=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,2^{k-p}=\left(\sum_{k=p}^{n-1}a_k\,2^{k-p}\right)+\left(\sum_{k=0}^{p-1}a_k\,2^{k-p}\right)$ est somme d'un entier et d'une somme de puissances négatives de 2. Puisque *x* est non entier, la somme de puissances négatives de 2 est non nulle, il existe au moins un coefficients a_k parmi les *p* premiers qui n'est pas nul.

Par exemple, $35 = 2^5 + 2 + 1$ et $\frac{35}{4} = 2^3 + 2^{-1} + 2^{-2}$

Partie D : Développement dyadique illimité

X.1, 2 et 3. Sous les hypothèses de ces questions, la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 2^{-k}$ est convergente car c'est une série à termes positifs majorée terme à terme par la série géométrique convergente $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$. De plus sa somme $s(a)$ est telle que : $0 \leq s(a) \leq 1$ puisque $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$

X.4. Une suite dyadique propre admet une infinité de coefficients a_k égaux à zéro. Il suffit de particulariser l'un d'entre eux, soit *m* tel que $a_m = 0$. Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 2^{-k}$ est majorée terme à terme par la série géométrique convergente $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ privée de son terme de rang *m* : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 2^{-k} \leq_{gj} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} - 2^{-m}$ et il en résulte que $s(a) \leq 1 - 2^{-m} < 1$.

X.5. Soit *a* une suite dyadique impropre. Il existe un entier *m* : $k \geq m \Rightarrow a_k = 1$. Alors :
$s(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 2^{-k} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k\, 2^{-k} + \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = \left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k\, 2^{-k}\right) + 2^{-m+1}$. Le nombre $s(a)$ est somme de deux nombres dyadiques. On peut considérer comme évident que la somme de deux dyadiques est un dyadique.

X.6. $s(a) =_{gj} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. Le réel $\frac{1}{3}$ est associé au développement dyadique illimité où les termes de rang pair, et eux seuls, sont égaux à 1.

XI. Soit *x* un dyadique non nul dont la partie entière est égale à zéro : $x = \sum_{k=1}^{n} a_k\, 2^{-k}$ où les coefficients a_k ($1 \leq k \leq n$) sont tous égaux à 0 ou à 1, et où le coefficient d'indice *n* est exactement égal à 1 (puisque *x* est non nul, il y a au moins un coefficient non nul). La suite coïncidant avec (a_k) puis nulle à partir du rang $n+1$, n'est pas impropre et a pour somme *x*.

Mais vu que : $x=\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, 2^{-k} + 2^{-n}$ et que $2^{-n}=\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k}$ on obtient aussi : $x=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\, 2^{-k}$ avec $_{gilbertjulia2018}\begin{cases} b_k = a_k \;\; si\;\; k<n \\ b_n = 0 \\ b_k = 1 \;\; si\;\; k>n \end{cases}$ qui, quant à elle, est impropre.

XII.1. Par définition de la partie entière, $E\left(2^{k-1}\,x\right)$ est l'unique entier tel que : $2^{k-1}x-1<E\left(2^{k-1}\,x\right)\le 2^{k-1}x$.
Ce qui implique que : $2^k\,x-2<2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)\le 2^k\,x$.

$E\left(2^k\,x\right)$ est l'unique entier tel que : $2^k\,x-1<E\left(2^k\,x\right)\le 2^k\,x$.

Compte tenu des règles d'addition sur les inégalités de même sens :

$$\left.\begin{array}{l} 2^k\,x-1<E\left(2^k\,x\right)\le 2^k\,x \\ -2^k\,x\le -2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)<-2^k\,x+2 \end{array}\right\}\Rightarrow -1<E\left(2^k\,x\right)-2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)<2$$

Par conséquent $E\left(2^k\,x\right)-2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)=0$ ou bien $E\left(2^k\,x\right)-2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)=1$. La suite $\left(\alpha_k(x)\right)$ est dyadique.

2. Trivialement, $\left(u_n(x)\right)$ est une suite croissante puisque somme partielle d'une série à termes positifs et de plus $\lim_{n\to\infty}\left(v_n(x)-u_n(x)\right)_{gjulia}=\lim_{n\to\infty}\left(2^{-n}\right)=0$.

En outre, pour tout entier strictement positif *n* :
$v_n(x)-v_{n+1}(x)=2^{-n}-2^{-n-1}-\alpha_{n+1}(x)2^{-n-1}=2^{-n-1}\left(1-\alpha_{n+1}(x)\right)$
Puisque $\alpha_{n+1}(x)=0 \;ou\; 1$, $\left(1-\alpha_{n+1}(x)\right)\ge 0$ quel que soit l'entier *n*. Ainsi, quel que soit cet entier, $v_n(x)-v_{n+1}(x)\ge 0$; la suite $\left(v_n(x)\right)$ est une suite décroissante, les trois conditions d'adjacence sont réunies.

Les deux suites $\left(u_n(x)\right)$ et $\left(v_n(x)\right)$ sont des suites adjacentes donc convergent vers une limite commune. Pour tout entier *n*, $u_n(x)$ et $v_n(x)$ étant l'une et l'autre des sommes finies du style de la partie **C**, ce sont des développements de deux nombres dyadiques.

3. Pour tout entier $k\ge 1$: $2^{-k}\,\alpha_k(x)=2^{-k}\left(E\left(2^k\,x\right)-2\,E\left(2^{k-1}\,x\right)\right)=2^{-k}\,E\left(2^k\,x\right)-2^{-(k-1)}E\left(2^{k-1}\,x\right)$

Par suite, $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\,\alpha_k(x) =_{gj} \sum_{k=1}^{n}\left(2^{-k}\,E\left(2^k\,x\right)-2^{-(k-1)}E\left(2^{k-1}\,x\right)\right)$. On obtient une « somme télescopique » des termes $2^{-k}\,E\left(2^k\,x\right)$ dans laquelle ne subsistent dans la sommation que le premier et le dernier terme, par élimination deux à deux des termes intermédiaires : $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\,\alpha_k(x)=2^{-n}\,E\left(2^n\,x\right)-E(x)$.

Vu que $0\le x<1$, $E(x)=0$ et finalement, $u_n(x)=\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\,\alpha_k(x)=2^{-n}\,E\left(2^n\,x\right)$ ou, ce qui revient au même, $2^n\,u_n(x)=E\left(2^n\,x\right)$

La double inégalité résultant de la définition de la fonction partie entière implique que pour tout entier n : $2^n x - 1 < E(2^n x) \leq 2^n x$ donc que $x - 2^{-n} < u_n(x) \leq x$.

Il en résulte que : $x < u_n(x) + 2^{-n} = v_n(x) \leq x + 2^{-n}$.

Bilan : pour tout entier strictement positif n : $x - 2^{-n} < u_n(x) \leq x < v_n(x) \leq x + 2^{-n}$.

D'après le théorème des gendarmes, ces suites adjacentes étant encadrées par deux suites convergeant vers x, elles convergent elles-mêmes vers x, limite commune des deux suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$, c'est-à-dire que :

$$x = \lim_{n\to\infty}(u_n(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\alpha_k(x) \quad \textbf{(XII.5)}$$

4 à 6. Supposons que la suite $(\alpha_k(x))$ soit impropre, c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que : $k > m \Rightarrow \alpha_k(x) = 1$.

Alors : $x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\alpha_k(x) = \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\,\alpha_k(x)\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} =_{gj} u_m(x) + 2^{-m} = v_m(x)$, et l'égalité $x = v_m(x)$ serait en contradiction avec l'inégalité stricte obtenue en **XII.3.**

La suite $(\alpha_k(x))$ n'est pas impropre. On vient de construire une suite dyadique propre dont x est la somme.

Cette suite dyadique propre telle que $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\alpha_k = x$ est unique.

En effet, soient deux suites dyadiques propres, (α_k) et (β_k) distinctes et soit m le plus petit des rangs tels que $\alpha_k \neq \beta_k$. Un des coefficients de rang m est égal à 0 (on peut supposer sans diminuer la généralité que c'est β_m) et l'autre α_m à 1.

Soient (u_n) et (w_n) les suites définies respectivement par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\,\alpha_k$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\,\beta_k$. Elles sont supposées identiques jusqu'au rang $m-1$.

Les termes de rang m de diffèrent de 2^{-m} : $\sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\,\alpha_k = \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\,\beta_k\right) + 2^{-m}$.

Mais $\sum_{k=m+1}^{\infty} \beta_k\, 2^{-k} < 2^{-m}$ (inégalité stricte car la suite (β_k) étant propre, certains coefficients de rang supérieur à m sont nuls). Donc : $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\alpha_k > \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\beta_k$, les deux sommes ne sont pas les mêmes.

Par contraposition, deux suites (α_k) et (β_k) dyadiques propres telles que $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\,\beta_k$ sont nécessairement identiques.

7. Soit. $x=\sum_{k=1}^{\infty} d_k\, 2^{-k}$ Un décalage des indices sur une série convergente n'altère pas la propriété de convergence de la série (le décalage n'altère que la valeur de la somme) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\, d_{k+1} = 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}\, d_{k+1}\right) = 2\left(\sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j}\, d_j\right) =_{gjulia} 2\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\, d_j\right) - 2^{-1}\, d_1\right) = 2\,x - d_1$$

Par unicité de la suite dyadique propre telle que $s(d)=x$, $d_1=\alpha_1(x)=E(2\,x)-2\,E(x)$, conformément à la construction du **XII.1**. Puisque $0\le x<1$, $E(x)=0$ et $d_1=\alpha_1(x)=E(2\,x)$

En particulier, $\frac{2}{3}$ est associé au développement dyadique où les termes de rang impair, et eux seuls, sont égaux à 1.

XIII. Soit ε un nombre réel strictement positif et r un réel quelconque de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

On définit le réel strictement positif η ainsi : $\begin{cases}\eta=\min(\varepsilon,\,1)\ si\ r=0\ ou\ r=1\\ \eta=\min(\varepsilon,\,r,\,1-r)\ si\ 0<r<1\end{cases}$

Soit m un entier tel que $2^m>\frac{1}{\eta}$. On considère l'ensemble ordonné des nombres dyadiques $\left\{u_k=\frac{k}{2^m},\ k=0,\dots,2^m\right\}$. Deux éléments consécutifs de cet ensemble sont distants de $2^{-m}<\eta$. Il existe donc au moins deux éléments de cet ensemble, u_p et u_q (pas nécessairement consécutifs, il peut y en avoir plusieurs de chaque côté de *r*) tels que : $r-\varepsilon\le r-\eta<u_p\le r\ {}_{gj}\!\le u_q<r+\eta\le r+\varepsilon$ dont un au moins est à la fois dans $]r-\varepsilon,\ r+\varepsilon[$ et dans $[0\ ;\ 1]$.

Quel que soit le réel strictement positif ε, aussi petit que l'on veut, il y a toujours au moins un nombre dyadique qui appartient à l'intervalle $]r-\varepsilon,\ r+\varepsilon[\cap[0\ ;\ 1]$. L'ensemble $\mathbf{D_2}\cap[0\ ;\ 1]$ est dense dans $[0\ ;\ 1]$. Par translations successives, $\mathbf{D_2}\cap[n\ ;\ n+1]$ est dense dans $[n\ ;\ n+1]$ quel que soit l'entier relatif *n* et par conséquent $\mathbf{D_2}=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(\mathbf{D_2}\cap[n\ ;\ n+1])$ est dense dans **R**.

XIV. $\mathbf{R}$ - $\mathbf{Q}$ est dense dans **R**, donc a fortiori $\mathbf{R}$ - $\mathbf{D_2}$ est dense dans **R** puisque $\mathbf{R}$ - $\mathbf{D_2}\supset\mathbf{R}$ - $\mathbf{Q}$.

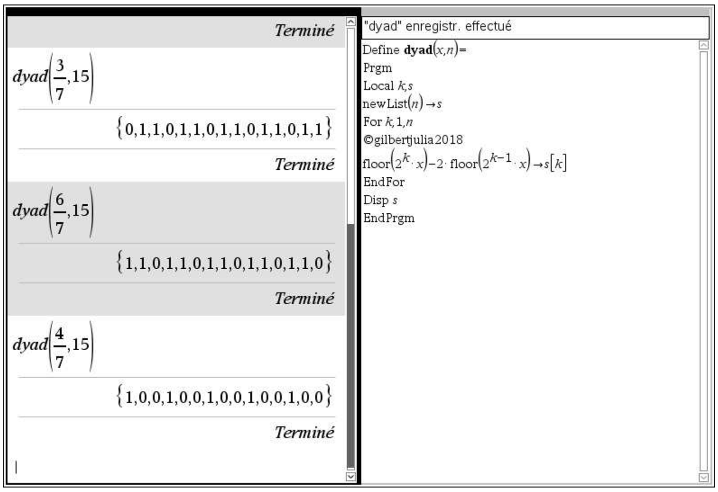
XV. Compte tenu des opérations sur les séries convergentes : $1-x=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\ {}_{gj}\!-\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,d_k=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,(1-d_k)$.

Compte tenu des opérations sur les séries convergentes :

$$1-x=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}-\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,d_k=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,(1-d_k).$$

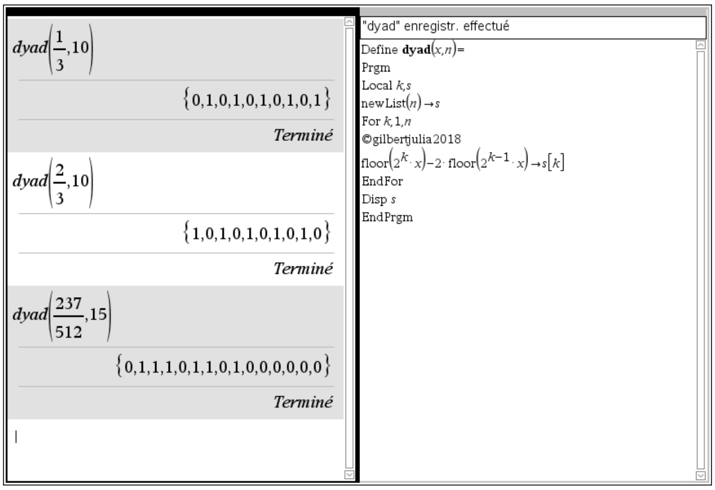
On a vu d'autre part :

$$2x=E(x)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,d_{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,d_{k+1}$$ si $x\in[0\,;\,1[$.



ci-contre, les quinze premiers termes de certains développements dyadiques.

On a vu : $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k}=\dfrac{1}{3}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k+1}=\dfrac{2}{3}$. Ainsi, $\dfrac{2}{3}$ est associé au développement dyadique où les termes de rang impair, et eux seuls, sont égaux à 1.



En dernier lieu, un exemple de développement dyadique fini.

Partie E : Suite extraite d'une suite de cosinus

XVII. θ est un réel strictement positif et on pose pour tout entier naturel n : $u_n = \cos\left(2^n \pi \theta\right)$.

De la sorte pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \cos\left(2 \times 2^n \pi \theta\right) = 2\cos^2\left(2^n \pi \theta\right) - 1$

Cette suite (u_n) peut être définie par récurrence : $\begin{cases} u_0 = \cos(\pi\theta) \\ u_{n+1} = 2u_n^{\ 2} - 1 \quad pour\ tout\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$ (question **4**)

1. Si θ est un nombre dyadique strictement positif, il existe deux entiers naturels a et p : $\theta = \dfrac{a}{2^p}$.

Pour $n \geq p+1$, posons $n - p - 1 = j$. Alors : $2^n \pi \theta = 2^{n-p} \times \pi a = 2^j \times (2\pi a)$

Pour tout $n \geq p+1$, $2^n \pi \theta \equiv 0 \ (2\pi)$ et $u_n = 1$. La suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang.

2. Si θ est tel qu'il existe deux entiers naturels a et p : $\theta = \dfrac{a}{2^p} + \dfrac{1}{3}$:

Pour $n \geq p+1$, $2^n \pi \theta = 2^{n-p-1} \times (2\pi a) + 2^{n-1} \times \dfrac{2\pi}{3}$

Pour tout $n \geq p+1$, ou bien $2^n \pi \theta \equiv \dfrac{2\pi}{3} \ (2\pi)$ ou bien $2^n \pi \theta \equiv \dfrac{4\pi}{3} \ (2\pi)$ et $u_n = -\dfrac{1}{2}$ dans chacun des deux cas. La suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang.

3. Si θ est tel qu'il existe deux entiers naturels a et p : $\theta = \dfrac{a}{2^p} + \dfrac{2}{3}$:

Pour $n \geq p+1$, $2^n \pi \theta = 2^{n-p-1} \times (2\pi a) + 2^n \times \dfrac{2\pi}{3}$

Pour tout $n \geq p+1$, ou bien $2^n \pi \theta \equiv \dfrac{2\pi}{3} \ (2\pi)$ ou bien $2^n \pi \theta \equiv \dfrac{4\pi}{3} \ (2\pi)$ et $u_n = -\dfrac{1}{2}$ dans chacun des deux cas. La suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang.

5. Si la suite (u_n) converge, elle ne peut converger que vers un point fixe de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 1$, c'est-à-dire vers une solution de l'équation $2x^2 - 1 = x$. La suite (u_n) ne peut converger que vers 1 ou vers $-\dfrac{1}{2}$.

6. Soit $\theta - E(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . 2^{-k}$ le développement en suite dyadique propre de $\theta - E(\theta)$, conformément à la partie **C**.

Un réel ε appartient à l'intervalle semi-ouvert $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ si et seulement si les termes de rang 1 et 2 de son développement dyadique propre sont nuls. Il est égal à $\dfrac{1}{2}$ si et seulement si le terme de rang 1 de son développement dyadique propre est le seul terme non nul.

Il s'agira d'isoler un tel développement :

Lorsque $n=0$: $\theta = E(\theta) + \dfrac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k . 2^{-k}$, on est amené à poser $k_0 = E\left(\dfrac{E(\theta)}{2}\right)$ et $a_0 = 0$ *ou* 1 suivant la parité de $E(\theta)$.

Lorsque $n=1$: $2\theta = 2E(\theta) + a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} a_k . 2^{1-k}$.

Lorsque plus généralement $n>1$:

$$2^n \theta = 2\left(2^{n-1}E(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, 2^{n-1-k}\right) + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k . 2^{n-k} = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{n+j} . 2^{-j}$$ en posant $k_n = 2^{n-1}E(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, 2^{n-1-k}$ et avec le décalage d'indice $j = k-n$

7. Avec les notations précédentes : $2^n \pi\theta = 2k_n\pi + a_n\pi + a_{n+1}\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_n \pi$.

Si $a_n = a_{n+1} = 0$ alors : $2^n \pi\theta = 2k_n\pi + \varepsilon_n\pi$.

Avec l'hypothèse $0 \le \varepsilon_n \le \dfrac{1}{2}$: $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π à un réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et son cosinus u_n appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Si $a_n = a_{n+1} = 1$ alors : $2^n\pi\theta = 2k_n\pi + \dfrac{3\pi}{2} + \varepsilon_n\pi$.

Vu que $0 \le \varepsilon_n \le \dfrac{1}{2}$: $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π à un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ et son cosinus u_n appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Dans les deux cas, ce cosinus est positif ou nul.

Réciproquement, ce cosinus est strictement positif si $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π ou bien à un réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ ou bien à un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, c'est-à-dire si $a_n = a_{n+1} = 0$ ou bien $a_n = a_{n+1} = 1$.

Si $a_n = 1$ $a_{n+1} = 0$ alors : $2^n\pi\theta = 2k_n\pi + \pi + \varepsilon_n\pi$.

Avec l'hypothèse $0 \le \varepsilon_n \le \dfrac{1}{2}$: $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π à un réel de l'intervalle $\left[\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et son cosinus u_n appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

Si $a_n = 0$; $a_{n+1} = 1$ alors : $2^n\pi\theta = 2k_n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_n\pi$.

Vu que $0 \le \varepsilon_n \le \dfrac{1}{2}$: $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π à un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ et son cosinus u_n appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

Réciproquement, ce cosinus est strictement négatif si $2^n\pi\theta$ est congru modulo 2π à un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$ c'est-à-dire si $a_n \ne a_{n+1}$, l'un des deux étant égal à 0 et l'autre à 1. Cette condition équivaut au fait que les termes pairs sont égaux à 0 ou à 1 et les termes impairs à 1 ou à 0 (respectivement).

8. Si (u_n) converge vers une limite strictement positive, cela ne peut être que vers 1. Il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |1-u_n| \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que quel que soit $n \geq n_0$, $u_n \geq \frac{1}{2} > 0$. D'après la question précédente, dans ce cas $a_n = a_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

La suite (a_n) est stationnaire à partir d'un certain rang, et puisque c'est une suite dyadique propre, elle contient une infinité de zéros : elle ne peut stationner qu'en zéro. Le nombre $\theta - E(\theta)$ a dans ce cas un développement dyadique fini, et θ est un nombre dyadique. La réciproque a été vue en **XVII.1**.

9. Si (u_n) converge vers une limite strictement négative, cela ne peut être que vers $-\frac{1}{2}$. Il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}-u_n\right| \leq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire que quel que soit $n \geq n_0$, $u_n \leq -\frac{1}{4} < 0$. D'après la question précédente, $a_n \neq a_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

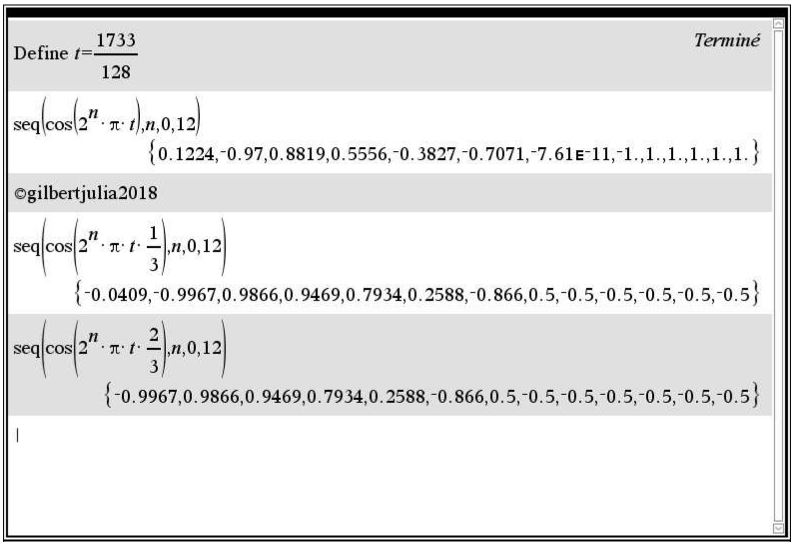
Nécessairement, les termes de suite (a_n) prennent alternativement les valeurs 0 puis 1 à partir d'un certain rang.

Ou bien $a_{2p} = 1$; $a_{2p+1} = 0$ à partir d'un certain rang, ou bien $a_{2p} = 0$; $a_{2p+1} = 1$ à partir d'un certain rang

D'après la partie **C**, l'un des nombres $\theta - \frac{1}{3}$ ou $\theta - \frac{2}{3}$ est un nombre dyadique. La réciproque a été vue en **XVII.2 et 3**.

XVIII. On peut résumer les trois cas : (u_n) est convergente si et seulement si le réel 3θ est un nombre dyadique. Elle est même stationnaire à partir d'un certain rang.

Ci-contre, quelques exemples de comportement d'une telle suite.



Ceci est destiné à rappeler, si besoin est, que l'on ne saurait tirer de conclusions trop hâtives d'un comportement apparent.