CAPES Maths 2017, épreuve 1, problème 1 : Le réseau Z^2

Les épreuves du CAPES 2017 reflètent assez bien les orientations actuelles de l'enseignement des mathématiques en France. Leur contenu entérine une hégémonie extravagante des thèmes numériques.

D'autre part, la mouture façon mortadelle Cochonou des quatre problèmes témoigne de la transformation de ce qui était naguère des mathématiques en enfonçage de portes ouvertes. Désormais, on démontre des résultats qui paraissaient triviaux aux mathématiciens normalement constitués d'antan.

Les auteurs des sujets ne sont pas en cause, les quatre problèmes tiennent la route et, chacun pris à part, ont un réel intérêt ; il paraît évident que le saucissonnage des énoncés a été imposé « d'en haut » à ces auteurs. C'est l'ensemble des quatre problèmes, c'est-à-dire le choix des thèmes sur lesquels porte la globalité des épreuves et leur morcellement en micro-questions ne laissant aucune place aux savoirs des candidats qui me paraissent contestables.

Je ne suis pas habilité à apprécier les épreuves de l'option informatique mais, justement, l'existence de cette option permettait d'espérer un retour salutaire vers des mathématiques pures et un peu plus de discernement dans le choix des sujets proposés aux candidats de l'option mathématique. Espoir déçu.

Voici quelques éléments de correction du problème 1 de l'épreuve 1, seul problème parmi les quatre où plane un ectoplasme de géométrie.

Ce problème 1 porte sur l'ensemble $\boldsymbol{Z}^2$ *des éléments de* $\boldsymbol{R}^2$ *dont les coordonnées sont des entiers relatifs.*

Partie A : Z-bases du réseau

Une famille de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ est une « **Z**-base » de $\mathbf{R}^2$ si elle possède les trois propriétés suivantes :

- Cette famille est constituée de deux vecteurs de $\mathbf{Z}^2$.
- Il s'agit d'une base de $\mathbf{R}^2$.
- Tout élément de $\mathbf{Z}^2$ a des coordonnées entières dans cette base.

La base canonique de $\mathbf{R}^2$ fournit un exemple trivial de « **Z**-base » de $\mathbf{R}^2$.

L'objectif de cette partie est de caractériser une Z-base à l'aide de sa matrice de passage depuis la base canonique.

Soit $e_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$; $e_2' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ une famille de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$.

Il s'agit d'une base de $\mathbf{R}^2$ constituée de deux vecteurs de $\mathbf{Z}^2$ si et seulement si :

- $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ (ce qui exprime qu'il s'agit d'une base de $\mathbf{R}^2$). Cette matrice $\underset{gjulia2017}{} A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est alors la matrice de passage depuis la base canonique vers la base $(e_1'; e_2')$
- (a_1, a_2, b_1, b_2) appartient à $\mathbf{Z}^4$ (ce qui exprime que $(e_1'; e_2') \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$)

Il s'agira d'une Z-base si et seulement si, de plus, tout élément de $\mathbf{Z}^2$ a des coordonnées entières dans cette base.

Or, si $X = x e_1 + y e_2 = x' e_1' + y' e_2'$, c'est-à-dire si X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base canonique et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1'; e_2')$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et inversement : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \underset{gj2017}{=} A^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Si $(e_1'; e_2')$ est une **Z**-base, alors tout vecteur de $\mathbf{Z}^2$ a des coordonnées entières dans cette base. C'est le cas pour les vecteurs de la base canonique. La matrice A^{-1}, matrice de passage depuis la base $(e_1'; e_2')$ vers la base canonique, est une matrice de nombres entiers. Son déterminant $\dfrac{1}{\det A}$ est un nombre entier. Le nombre entier $\det A$ ayant pour inverse un nombre entier, il s'agit d'un entier inversible pour la multiplication dans **Z**. Les seuls entiers inversibles pour la multiplication sont les entiers 1 et -1. En conséquence, $\det A = +1$ ou $\det A = -1$ (question **II.2**)
- Réciproquement, supposons que $(\det A) = \pm 1$. En dimension 2, les formules d'inversion d'une matrice sont : $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$. Si $(\det A) = 1$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et si $(\det A) = -1$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -b_2 & a_2 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$. Dans les deux cas, A^{-1} est une matrice à coefficients entiers relatifs. Tout vecteur $X = x\, e_1 + y\, e_2$ de $\mathbf{Z}^2$ a pour coordonnées dans la base $(e_1'; e_2')$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deux entiers relatifs car cocktails (« cocktail » = mélange d'opérations licites, ici somme, différence, produit) d'entiers relatifs. La base $(e_1'; e_2')$ est une **Z**-base (question **II.3**)

En conclusion, une famille $e_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$; $e_2' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ est une **Z**-base si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées (question **II.4**):

- $(a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2)$ appartient à $\mathbf{Z}^4$
- $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \pm 1$

La question **III** recherche comment choisir quatre entiers $(a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2)$ pour construire une **Z**-base.

La relation : $\det A = a_1 b_2 - b_1 a_2 = \pm 1$ n'est autre qu'une relation de Bézout. Les entiers a_1 et b_1 sont nécessairement des entiers premiers entre eux (question **III.1**).

Réciproquement, si a_1 et b_1 sont des entiers premiers entre eux, alors il existe des entiers u et v qui vérifient la relation de Bézout : $a_1 u - b_1 v = 1$. La famille $e_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$; $e_2' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ est une **Z**-base dont $e_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ est premier vecteur (question **III.2**).

Par exemple, si $e_1' = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$, on peut ou bien résoudre l'équation $7u - 10v = 1$ qui a pour solutions :: $\begin{cases} u = 3 + 10k \\ v = 2 + 7k \end{cases}$ ou bien résoudre l'équation $7u - 10v = -1$ qui a pour solutions : $\begin{cases} u = -3 + 10k \\ v = -2 + 7k \end{cases}$.
(k désignant un entier relatif arbitraire)

Les familles : $e_1' = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$; $e_2' = \begin{pmatrix} 2 + 7k \\ 3 + 10k \end{pmatrix}$ ou $e_1' = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$; $e_2' = \begin{pmatrix} -2 + 7k \\ -3 + 10k \end{pmatrix}$ (k désignant un entier relatif arbitraire) sont des **Z**-bases dont $e_1' = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ est premier vecteur.

Partie B : Applications linéaires laissant le réseau globalement invariant

Cette partie a pour objectif d'étudier les applications linéaires f qui laissent le réseau $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant.

Ce réseau contenant au moins deux vecteurs indépendants (ne serait-ce que ceux de la base canonique), seules des applications linéaires inversibles sont à même de laisser le réseau $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant : det A est un entier non nul.

NB. Cette dernière remarque a son importance : dès lors qu'on considère l'ensemble des applications linéaires laissant $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant muni de loi de composition des applications, cet ensemble est désormais un groupe pour cette loi.

De façon plus générale, dans le plan vectoriel, si une partie E contient au moins deux vecteurs indépendants, l'ensemble des applications linéaires qui laissent E globalement invariant est un groupe pour la loi $\circ$; dans le plan affine, si une partie E contient au moins trois points non alignés, l'ensemble des applications affines qui laissent E globalement invariant est un groupe pour la loi $\circ$.

Il a va autrement du « groupe des isométries » d'une partie E du plan car une isométrie est d'emblée une application inversible. Par exemple, on parle du « groupe des isométries » d'une paire de points alors qu'il n'y a pas de groupe des *applications* affines qui laissent globalement invariante cette paire de points (on est éventuellement obligé d'imposer un groupe de *transformations* affines).

Cette digression étant faite …

Soit f un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui laisse le réseau $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant. On se propose de caractériser l'égalité $f\left(\mathbf{Z}^2\right)=\mathbf{Z}^2$ en étudiant une double inclusion.

1. L'inclusion $f\left(\mathbf{Z}^2\right)\subset\mathbf{Z}^2$

Les images $(e_1'; e_2')$ par f des vecteurs de la base canonique appartiennent au réseau $\mathbf{Z}^2$. Si $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base canonique, ses colonnes sont celles des coordonnées de $(e_1'; e_2')$: alors (a_1, a_2, b_1, b_2) appartient à $\mathbf{Z}^4$.

gjulia

Réciproquement, si (a_1, a_2, b_1, b_2) appartient à $\mathbf{Z}^4$, alors tout élément de $\mathbf{Z}^2$ a pour image par f un élément de $\mathbf{Z}^2$ car les coordonnées de son image dans la base canonique sont des cocktails d'entiers relatifs.

Par conséquent : $(a_1, a_2, b_1, b_2)\in\mathbf{Z}^4 \Leftrightarrow f\left(\mathbf{Z}^2\right)\subset\mathbf{Z}^2$

2. L'inclusion $f\left(\mathbf{Z}^2\right)\supset\mathbf{Z}^2$

On note que : $f\left(\mathbf{Z}^2\right)\supset\mathbf{Z}^2 \Leftrightarrow \mathbf{Z}^2\supset f^{-1}\left(\mathbf{Z}^2\right)$ en composant par f^{-1} dans l'inclusion $f\left(\mathbf{Z}^2\right)\supset\mathbf{Z}^2$

D'après l'équivalence obtenue ci-dessus, $\mathbf{Z}^2\supset f^{-1}\left(\mathbf{Z}^2\right)$ si et seulement si la matrice de f^{-1} est une matrice à coefficients entiers.

Si $f\left(\mathbf{Z}^2\right)=\mathbf{Z}^2$, la double inclusion est vérifiée. Les deux matrices A et A^{-1} sont des matrices à coefficients entiers. Leurs déterminants sont des entiers relatifs. . La relation $\left(\det A^{-1}\right)\times\left(\det A\right)=1$ implique que det A et

$\det A^{-1}$ sont deux entiers inversibles (inverses l'un de l'autre) pour la multiplication dans **Z** : Par conséquent, $\det A \in \{-1\,;\,+1\}$.

Réciproquement, si $(a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2)$ appartient à $\mathbf{Z}^4$ et si en outre $\det A = \pm 1$, alors la matrice de f^{-1} est elle aussi à coefficients entiers (voir formules d'inversion déjà évoquées):

$$\begin{cases} f(\mathbf{Z}^2) \subset \mathbf{Z}^2 \\ f^{-1}(\mathbf{Z}^2) \subset \mathbf{Z}^2 \end{cases} \Rightarrow f(\mathbf{Z}^2) = \mathbf{Z}^2,$$

il y a invariance globale du réseau $\mathbf{Z}^2$.

Les applications linéaires qui laissent le réseau $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant sont celles qui ont dans la base canonique une matrice à coefficients entiers et de déterminant ± 1, c'est-à-dire celles qui transforment la base canonique en une **Z**-base.

Leur ensemble forme un sous-groupe du groupe des isomorphismes vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Partie C : Isométries laissant le réseau globalement invariant

Les isométries vectorielles ont une matrice soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (rotations vectorielles ou identité, de déterminant +1) soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ (symétries vectorielles de déterminant -1).

Une telle isométrie laisse le réseau $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant si et seulement sa matrice est à coefficients entiers.

Ainsi, ou bien $\cos t = \pm 1\,;\ \sin t = 0$ ou bien $\cos t = 0;\ \sin t = \pm 1$.

L'inventaire des isométries convenables en découle :

En ce qui concerne les isométries positives : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ identité ; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ rotation d'angle π ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

En ce qui concerne les symétries vectorielles : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'axe $\Delta(e_1)$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'axe $\Delta(e_2)$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'axe $\Delta(e_1 + e_2)$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'axe $\Delta(e_1 - e_2)$

On reconnaît là les huit isométries du groupe des isométries d'un carré.

Quant aux isométries affines laissant $\mathbf{Z}^2$ *globalement invariant :*

Si f est une telle isométrie, $O' = f(O) \in \mathbf{Z}^2$. Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est à coordonnées entières.

La translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ qui envoie O sur $O' = f(O)$ envoie chaque point M de $\mathbf{Z}^2$ sur le point M' de $\mathbf{Z}^2$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$. Inversement, tout point M de $\mathbf{Z}^2$ est image du point M_1 de $\mathbf{Z}^2$ tel que $\overrightarrow{MM_1} = -\overrightarrow{OO'}$. Cette translation laisse $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant.

$t_{-\overrightarrow{OO'}} \circ f = \left(t_{\overrightarrow{OO'}}\right)^{-1} \circ f$ en tant que composée d'isométries laissant $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant est une isométrie qui laisse $\mathbf{Z}^2$ globalement invariant. De plus : $t_{-\overrightarrow{OO'}} \circ f(O) = t_{-\overrightarrow{OO'}}(O') = O$; elle fixe le point O, c'est un élément de G_0. L'application f est ainsi composée d'une isométrie de G_0 et d'une translation dont le vecteur est à coordonnées entières. Réciproquement, toute composée de ce type laisse le réseau invariant puisque c'est le cas de chaque application composante.

Soit $O'(a,\, b)$ les coordonnées de l'image par f du point O.

Un inventaire des huit isométries du réseau envoyant O sur O', non demandé par l'énoncé, en découle :

La translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ et la symétrie centrale de centre $\Omega\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ s'obtiennent immédiatement.

En déterminant leur point invariant, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre $I\left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ et la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ de centre $J\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ complètent l'ensemble des déplacements.

En ce qui concerne les 4 antidéplacements, ils sont définis analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b - y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = a - x \\ y' = b + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = a + y \\ y' = b + x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = a - y \\ y' = b - x \end{cases}.$$

Il s'agit de symétries-translations (composées canoniquement d'une réflexion et d'une translation parallèlement à l'axe de réflexion) dont on trouve la translation en considérant le vecteur moitié de celui de la translation $f \circ f$.

Respectivement, $f \circ f$ est définie par : $\begin{cases} x'' = 2a + x \\ y'' = y \end{cases}$; $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = 2b + y \end{cases}$; $\begin{cases} x'' = a + b + x \\ y'' = b + a + y \end{cases}$; $\begin{cases} x'' = a - b + x \\ y'' = b - a + y \end{cases}$.

L'axe de réflexion est celui de $t^{-1} \circ f$. On obtient respectivement :

1. La composée, dans l'ordre que l'on veut, de la translation de vecteur $a\overrightarrow{e_1}$ et de la réflexion d'axe $\Delta 1$ d'équation $y = \frac{b}{2}$
2. La composée, dans l'ordre que l'on veut, de la translation de vecteur $b\overrightarrow{e_2}$ et de la réflexion d'axe $\Delta 2$ d'équation $x = \frac{a}{2}$

3. La composée, dans l'ordre que l'on veut, de la translation de vecteur $\frac{a+b}{2}\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)$ et de la réflexion d'axe $\Delta 3_{gj}$ d'équation $y = x - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

4. La composée, dans l'ordre que l'on veut, de la translation de vecteur $\frac{a-b}{2}\left(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)$ et de la réflexion d'axe $\Delta 4_{gj}$ d'équation $y = -x + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

Partie D et E : Pavage et frise

Grosso modo …

Les éléments de G_0 sont les huit isométries qui laissent globalement invariant le carré de centre *O* considéré dans la partie D. Il suffit de composer l'une ou l'autre de ces isométries par une translation envoyant *O* sur un autre point du réseau pour paver le plan.

Dès lors que l'on grise comme dans l'énoncé quatre des huit triangles rectangles isocèles qui forment une partition de ce carré, on en détruit la symétrie. Seules les quatre isométries positives laissent globalement invariant le carré grisé.

En considérant la frise, seules figurent dans son groupe d'invariance les translations et les symétries centrales qui envoient *O* sur un point entier de la droite $\Delta\left(O, \overrightarrow{e_1}\right)$.

Conservent la frise les translations de vecteurs $a\,\overrightarrow{e_1}$ et les symétries centrales de centre $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ où a est un entier relatif.