Capes 2016, épreuve 2, problème 1

On prend l'café au lait au lit avec des gâteaux et des croissants chauds …

Histoire de café au lait illustrant assez bien les tendances actuelles de l'enseignement des mathématiques. L'élève fictif de la classe fictive qui tripote son tableur fait-il vraiment des mathématiques ? On peut s'interroger.

Le sujet

Problème proposé à une classe de Première :
Aline et Bertrand commandent chacun un café et une carafe de lait. Aline ajoute immédiatement le lait dans son café puis attend trois minutes que le mélange refroidisse avant de le boire. Bertrand attend trois minutes que le café refroidisse avant d'y ajouter le lait.
Qui d'Aline ou de Bertrand a bu le café au lait le plus chaud ?

Données :

- Chaque café est servi à la température de 48° C.
- La température ambiante T_a, qui est aussi celle du lait, est de 22°C.
- Chaque tasse contient 15 cl de café et chacun y ajoute 3 cl de lait.
- Lorsque l'on mélange un volume V_1 d'un premier liquide à température T_1 et un volume V_2 d'un second liquide à température T_2, on obtient un liquide dont la température est égale à $\dfrac{V_1T_1+V_2T_2}{V_1+V_2}$

L'évolution, à partir d'un temps initial $t_0=0$, de la température d'un liquide est modélisée par l'équation différentielle : (E) $T'(t)=-0{,}04(T(t)-T_a)$ où T_a désigne la température ambiante exprimée en degré Celsius, $T(t)$ la température du liquide exprimée en degré Celsius à l'instant t (exprimé en minutes) et $T'(t)$ la valeur à l'instant t de la dérivée de la fonction T.

Méthode d'Euler :
On part d'une condition initiale $T(0)=\alpha$, où α est un nombre réel, et d'une relation $T'(t)=F(T(t))$ vérifiée par une fonction T dérivable sur [0; a], où a est un réel strictement positif et F une fonction définie sur **R**. On détermine une valeur approchée de $T(a)$ selon le procédé détaillé ci-dessous.

- On choisit un entier n strictement positif.
- On détermine une subdivision $0=t_0<t_1<t_1<\ldots<t_n=a$ partageant l'intervalle [0; a] en n intervalles de même longueur. On pose $y_0=\alpha$.
- On note D_0 la droite passant par le point A_0 de coordonnées $(t_0\,;\,y_0)$ et de coefficient directeur $F(y_0)$. On note A_1 le point d'abscisse t_1 de la droite D_0. L'ordonnée y_1 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_1)$.
- On note D_1 la droite passant par le point A_1 de coordonnées $(t_1\,;\,y_1)$ et de coefficient directeur $F(y_1)$. On note A_2 le point d'abscisse t_2 de la droite D_1. L'ordonnée y_2 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_2)$.
- On itère ce processus jusqu'à y_n, qui est pris comme valeur approchée de $T(a)$.

Partie A : Mise en œuvre de la méthode d'Euler

Soit n un entier strictement positif. On applique la méthode d'Euler à l'équation différentielle (E). On note $T_n(3)$ la valeur approchée de $T(3)$ obtenue selon le procédé détaillé ci-dessus.

Dans toute la suite, on note $(t_k\,,\,y_k)$ les coordonnées du point A_k construit à la k-ième étape de la méthode d'Euler $(k \in \{0\,;1\,;...;\,n\})$.

I. Exprimer les réels $t_0,...,t_n$ subdivisant le segment [0; 3] en n intervalles de même longueur.

II. Pour $0 \le k \le n-1$, déterminer une équation de la droite D_k.

III. En déduire que $y_{k+1} = y_k - 0{,}12\dfrac{y_k}{n} + \dfrac{2{,}64}{n}$

.

IV. Le professeur demande aux élèves de donner des valeurs approchées des températures du café de Bertrand et du café au lait d'Aline au bout de trois minutes à l'aide de la méthode d'Euler. Voici la production d'un élève ayant utilisé un tableur pour calculer la température du café de Bertrand :

	A	B
1	Température ambiante	22
2	Température initiale	48
3	n	20
4		
5	Temps	Température café
6	0	48
7	1	47,844
8	2	47,688936
9	3	47,534802384
10	4	47,3815935697
11	5	47,2293040083
12	6	47,0779281842

1. Quelle formule l'élève a-t-il pu saisir dans la cellule B7 pour obtenir ces résultats
en étirant la formule vers le bas et en utilisant les données contenues dans les
cellules B1, B2 et B3 ?
2. Comment l'élève peut-il modifier sa production pour calculer une valeur approchée
de la température du café au lait d'Aline au bout de trois minutes ?

Partie B : résolution exacte

I. Soit α un réel strictement positif. Déterminer la solution exacte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -0{,}04(y(t) - 22) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

II. En appliquant le résultat de la question précédente pour deux valeurs bien choisies de α, répondre à la question posée aux élèves. On donnera une valeur approchée décimale de la température en degré Celsius des cafés au lait d'Aline et de Bertrand à 10-2 près.

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler

On étudie la convergence de la suite $(T_n(3))_{n\ge1}$ quand $n \to \infty$ lorsque l'on prend la condition initiale $\alpha = 48$

I. Dans cette question, n est fixé.

1. Donner deux réels a et b tels que pour tout $k \in \{0\,;1\,;...\,;\,n-1\}$, $y_{k+1} = ay_k + b$

2. Déterminer le réel l tel que $l = a\,l + b$

3. En considérant la suite $(y_k - l)_{k\in[0\,;\,n]}$, exprimer $y_n = T_n(3)$ en fonction de n.

II. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(3)$ et comparer avec le résultat obtenu dans la partie B.

III. Déterminer un équivalent de $T(3) - T_n(3)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Eléments de correction

Partie A : Mise en œuvre de la méthode d'Euler

I. Pour $0 \le k \le n$, $t_k = \dfrac{3k}{n}$, chaque intervalle de subdivision ayant pour longueur $\dfrac{3}{n}$.

II. Une équation de la droite D_k est : $y - y_k = -0{,}04(y_k - 22)\left(x - \dfrac{3k}{n}\right)$

III. y_{k+1} est le point d'abscisse $\dfrac{3(k+1)}{n}$ de cette droite :

$$y_{k+1} - y_k = -0{,}04(y_k - 22) \times \frac{3}{n}$$

Ce qui donne : $y_{k+1} = y_k - 0{,}12\dfrac{y_k}{n} + \dfrac{2{,}64}{n}$

IV.1. L'élève peut écrire en B7 :
$= B6 - 0{,}12 * B6/\$B\$3 + 2{,}64/\$B\$3$
Il peut aussi bien, si son tableur le permet, stocker en variable **n** le contenu de la cellule B3 puis écrire en B7 :
$= B6 - 0{,}12 * B6/n + 2{,}64/n$

2. Pour obtenir la température du café au lait d'Aline, il suffit d'écrire 131/3 à la place de 48 en cellule B6.

	A	B	C	D	E	F	G
◆		=seq(3*k/r	=seqn(u(n				
8		1.05	46.9275				
9		1.2	46.7779				
10		1.35	46.6292				
11		1.5	46.4815				
12		1.65	46.3346				
13		1.8	46.1886				
14		1.95	46.0434				
15		2.1	45.8992				
16		2.25	45.7558				
17		2.4	45.6132				
18		2.55	45.4716				
19		2.7	45.3307				
20		2.85	45.1907				
21		3.	45.0516	41.2097			
22							
23							

E1

V.2. On parvient à la conclusion que Aline et Bertrand boiront leur café à la même température, 41,2°C.

Il revient au même de faire le mélange au début des 3 minutes ou à la fin des 3 minutes.

	A	B	C	D	E	F	G
◆		=seq(3*k/r	=seqn(u(n				
8		1.05	42.7729				
9		1.2	42.6482				
10		1.35	42.5244				
11		1.5	42.4012				
12		1.65	42.2788				
13		1.8	42.1571				
14		1.95	42.0362				
15		2.1	41.916				
16		2.25	41.7965				
17		2.4	41.6777				
18		2.55	41.5596				
19		2.7	41.4423				
20		2.85	41.3256				
21		3.	41.2097				
22							

C21 $=b20\cdot\left(1-\dfrac{0.12}{nn}\right)+\dfrac{2.64}{nn}$

Partie B : résolution exacte

I. La fonction $t \mapsto z(t) = y(t) - 22$ est la solution de l'équation homogène $z'(t) = -0{,}04z(t)$ qui prend en zéro la valeur $\alpha - 22$. Donc : $z(t) = (\alpha - 22)\mathbf{e}^{-0{,}04t}$ et $y(t) = 22 + (\alpha - 22)\mathbf{e}^{-0{,}04t}$

II. Avec $\alpha = 48$, on obtient la fonction : $y(t) = 22 + 26\mathbf{e}^{-0{,}04t}$ et $y(3) = 45{,}06$ à 10^{-2} près.
Après mélange avec le lait, on obtient un café au lait à la température de $41{,}22°C$ (à 10^{-2} près).

Avec $\alpha = \dfrac{131}{3}$, ce qui correspond à la température d'un mélange immédiat, on obtient la fonction : $y(t) = 22 + \dfrac{65}{3}\mathbf{e}^{-0{,}04t}$ et $y(3) = 41{,}22$ à 10^{-2} près.

Dans les deux cas, la valeur exacte de la température du café au lait au bout de 3 minutes est $22 + \dfrac{65}{3}\mathbf{e}^{-0{,}12}$

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler

I. 1. On a vu que $y_{k+1} = y_k - 0{,}12\dfrac{y_k}{n} + \dfrac{2{,}64}{n}$, $a = 1 - \dfrac{0{,}12}{n}$ et $b = \dfrac{2{,}64}{n}$

2. Le réel l est $l = 22$.

3. La suite $(y_k)_{k\in[0\,;\,n]}$ est une suite arithmético-géométrique et $(y_k - 22)_{k\in[0\,;\,n]}$ est une suite géométrique de raison $1 - \dfrac{0{,}12}{n}$ et de premier terme 26. $y_n \underset{gjulia2016}{=} T_n(3) = 22 + 26\left(1 - \dfrac{0{,}12}{n}\right)^n$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(3) == 22 + 26\mathbf{e}^{-0{,}12} = T(3)$ vu que de façon générale : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n = \mathbf{e}^{-a}$

III. $T(3) - T_n(3) = 26\left(\mathbf{e}^{-0{,}12} - \left(1 - \dfrac{0{,}12}{n}\right)^n\right)$

Or : $n\ln\left(1 - \dfrac{0{,}12}{n}\right) = n\left(-\dfrac{0{,}12}{n} - \dfrac{0{,}0072}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -0{,}12 - \dfrac{0{,}0072}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-0{,}12} \times \exp\left(-\frac{0{,}0072}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$T(3) - T_n(3) = 26\left(\mathrm{e}^{-0{,}12}\left(1 - \exp\left(-\frac{0{,}0072}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right)$$

$$T(3) - T_n(3) \underset{gjulia2016}{=} 26\left(\mathbf{e}^{-0{,}12}\left(\frac{0{,}0072}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$T(3) - T_n(3) = \frac{0{,}1872 \times \mathrm{e}^{-0{,}12}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ci-contre $T(3) - T_n(20) \approx 0{,}0083$ et

$$T(3) - T_n(20) - \frac{0{,}1872\mathrm{e}^{-0{,}12}}{20} \approx 0{,}00003$$