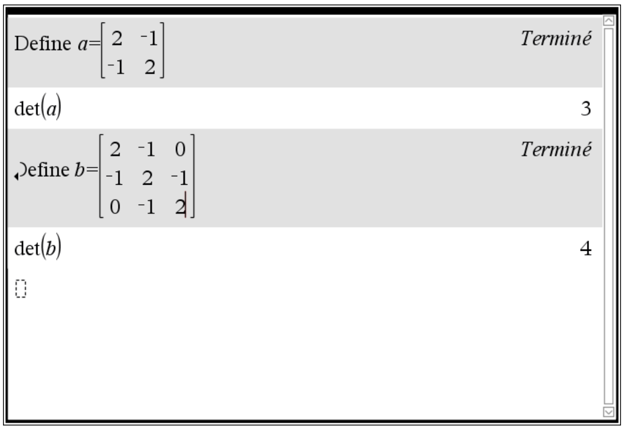
Capes 2016, épreuve 1, problème 2

Voir ou revoir la méthode dite « des différences finies » pour la résolution d'équations différentielles. Pour ma part, il y a plusieurs décennies que je l'avais perdue de vue.
Je n'ai pas vérifié si cette méthode est abordée ou non au niveau BTS. (?)

Partie A : Calcul d'un déterminant, applications

I. Le calcul montre que : $D_1 = 2$; $D_2 = 3$; $D_3 = 4$.



En développant le calcul du déterminant D_n par rapport aux termes de la première colonne de A_n, on obtient que : $D_n = 2\det(A_{n-1}) + \begin{vmatrix} -1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \\ \dots & -1 & \dots & \\ 0 & & & 2 \end{vmatrix}$

En développant le deuxième déterminant par rapport aux termes de sa première ligne : $D_n = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

- La conjecture : « pour k entier ≥ 1, $D_k = k+1$ » est vérifiée aux rangs 1 et 2.
- Supposons que la formule conjecturée soit correcte aux deux rangs $n-2$ et $n-1$. Alors, au rang suivant n : $D_n == 2((n-1)+1) - ((n-2)+1) = n+1$. Elle est encore correcte au rang suivant n.

Cette formule est donc correcte pour tout entier $n \geq 1$.

Quel que soit l'entier $n \geq 1$, le déterminant de la matrice A_n est non nul, cette matrice est inversible.

II.1. La matrice A_n étant inversible, la relation $B = A_n U$ est équivalente à la relation $U = (A_n)^{-1} B$.

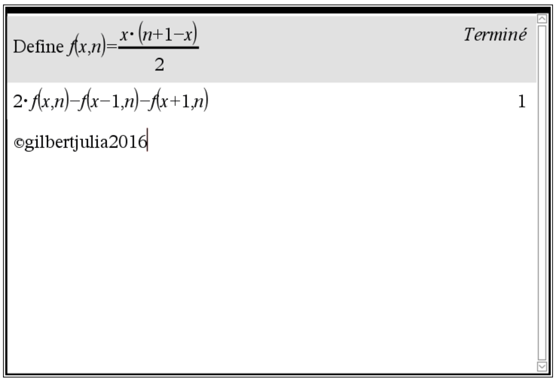
Or, le calcul matriciel établit que quel que soit U appartenant à $\mathbf{R}^n$: $A_n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \underset{\text{gilbertjulia 2016}}{=} \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 \\ -u_2 + 2u_3 - u_4 \\ \dots \\ -u_{n-1} + 2u_n \end{pmatrix}$

Ainsi, $B = A_n U$ si et seulement si : $\begin{cases} 2u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = b_i \quad \forall\, i \in \{2,\dots,n-1\} \\ -u_{n-1} + 2u_n = b_n \end{cases}$

La relation générale $-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = b_i$ obtenue pour $2 \leq i \leq n-1$ s'étend aux index 1 et n si et seulement si en outre $u_0 = u_{n+1} = 0$

La matrice colonne $\begin{pmatrix} -u_0+2u_1-u_2 \\ -u_1+2u_2-u_3 \\ \ldots \\ -u_{n-2}+2u_{n-1}+u_n \\ -u_{n-1}+2u_n+u_{n+1} \end{pmatrix}$ coïncidant avec $A_n U$ si et seulement si $u_0 = u_{n+1} = 0$, c'est à cette condition, et à elle seule, que les n relations $-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}=b_i$ pour $i=1,\ldots,n$ déterminent le vecteur $U = A_n^{-1}B$

2. Soit f l'application : : $\begin{cases} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{x(n+1-x)}{2} \end{cases}$.



- D'une part : $f(0)=f(n+1)=0$
- D'autre part quel que soit le réel x : $2f(x)-f(x-1)-f(x+1)=1$

En posant pour tout entier i de $\{0, 1, 2,\ldots, n, n+1\}$ $u_i = f(i)$:

- $A_n\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$.
- En outre, $u_0 = u_{n+1} = 0$

Avec $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$, les hypothèses de la question **II.1.** sont satisfaites. question, l'élément U de $\mathbf{R}^n$

$$A_n\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ u_i = \frac{i(n+1-i)}{2} \right. \left(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\right)$$

3. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x(n+1-x)}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(n+1)}{2}x$ est une fonction polynôme du deuxième degré en x. Le coefficient de x^2 est négatif, cette fonction du deuxième degré admet sur $\mathbf{R}$ un maximum atteint pour $x = -\dfrac{\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{n+1}{2}$ et ce maximum vaut $\dfrac{(n+1)^2}{8}$.

En particulier, quel que soit l'entier i de $\{1, 2,\ldots, n\}$: $u_i = f(i) \leq \dfrac{(n+1)^2}{8}$

3. Soit *j* le plus grand indice tel que : $u_j = \min(u_1,...,u_n)$. Supposons que $j \geq 2$.
L'hypothèse $j < n$ amènerait à : $b_j = -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}$ et $u_{j+1} - u_j = (u_j - u_{j-1}) - b_j$. Or, $(u_j - u_{j-1}) \leq 0$ vu la propriété minimale de u_j et *a fortiori* $u_{j+1} - u_j = (u_j - u_{j-1}) - b_j \leq 0$ ce qui établirait que $u_{j+1} \leq u_j$ et contredirait la définition de l'indice *j* en tant que « plus grand indice » tel que $u_j = \min(u_1,...,u_n)$.
Si $j \geq 2$, alors nécessairement $j = n$. Donc, $j = 1$ ou $j = n$

Supposons que : $j = 1$. Puisque $b_1 = 2u_1 - u_2$: $u_1 = b_1 + (u_2 - u_1) > b_1 \geq 0$. En effet, $u_2 - u_1 > 0$ (inégalité stricte) sinon l'indice 1 ne serait pas « le plus grand » indice tel que $u_j = \min(u_1,...,u_n)$.
Supposons que : $j = n$. Puisque $b_n = 2u_n - u_{n-1}$: $u_n = b_n + (u_{n-1} - u_n) \geq b_n \geq 0$. En effet, $(u_{n-1} - u_n) \geq 0$ (inégalité large) puisque $u_n = \min(u_1,...,u_n)$
Dans un cas comme dans l'autre : $\min(u_1,...,u_n) \geq 0$, toutes les composantes de *U* sont positives ou nulles.
Si *B* a toutes ses composantes positives ou nulles, alors l'élément de $\mathbf{R}^n$: $U = A^{-1}B$ a lui aussi toutes ses composantes positives ou nulles.

4.1. Pour tout $i \in \{1,..., n\}$: $|b_i| \geq b_i$ et $|b_i| \geq -b_i$ donc *a fortiori* : $\left(\max_j |b_j|\right) - b_i \geq 0$ et $\left(\max_j |b_j|\right) + b_i \geq 0$.

Les deux élément de $\mathbf{R}^n$: $\beta\begin{pmatrix}1\\1\\...\\1\end{pmatrix} - B$ et a $\beta\begin{pmatrix}1\\1\\...\\1\end{pmatrix} + B$ ont par construction toutes leurs composantes positives ou nulles.

D'après la question précédente : $V = A^{-1}\left(\beta\begin{pmatrix}1\\1\\...\\1\end{pmatrix} - B\right)$ et $W = A^{-1}\left(\beta\begin{pmatrix}1\\1\\...\\1\end{pmatrix} + B\right)$ ont eux aussi toutes leurs composantes positives ou nulles. Quel que soit *i* de $\{1, 2,.., n\}$: $v_i \geq 0$; $w_i \geq 0$

4.2. Compte tenu des propriétés de linéarité en vigueur dans $\mathbf{R}^n$:

$$(2\beta).A_n^{-1}\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\left(\beta\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix}B\right) + \left(\beta\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix} + B\right)\right) = V + W$$

et

$$2U = 2A^{-1}B = A^{-1}\left(\left(B + \beta\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix}\right) - \left(B - \beta\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix}\right)\right) = W - V$$

D'après la question **II.2** :

- Quel que soit *i* de $\{1, 2,.., n\}$: $v_i + w_i = (2\beta)\dfrac{i(n+1-i)}{2} = \beta\, i(n+1-i)$
- $\max_i(v_i + w_i) \leq (2\beta)\dfrac{(n+1)^2}{8} = \beta\dfrac{(n+1)^2}{4}$

4.3. Puisque $2U = W - V$: quel que soit *i* de $\{1, 2,.., n\}$: $w_i - v_i = 2u_i$
Puisque tous les v_i sont positifs ou nuls : $w_i - v_i = 2u_i \leq w_i + v_i$

Puisque quel que soit i de $\{1, 2,.., n\}$: $2u_i \le w_i + v_i$, *a fortiori* quel que soit i de $\{1, 2,.., n\}$: $2u_i \le \max_i(w_i + v_i)$. Puisque c'est vrai pour tous les indices i : $2\max_i(u_i) = \max_i(2u_i) \le \max_i(w_i + v_i)$

D'après **4.2.** $\max_i(w_i + v_i) \le \beta\dfrac{(n+1)^2}{4}$. Donc : $\max_i(u_i) \le \beta\dfrac{(n+1)^2}{8}$

Partie B : Inégalité de Taylor Lagrange

I.1. Si f est de classe C^n sur I avec $n \ge 1$ sa fonction dérivée première est (au minimum) une fonction continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I (ce qui justifie l'existence de l'intégrale de f sur $[a, b]$) et de primitive f sur I (ce qui justifie la valeur $f(b) - f(a)$ de l'intégrale de f sur $[a, b]$).

I.2. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. Si f est de classe C^n sur I avec $n \ge 2$, sa fonction dérivée seconde est (au minimum) une fonction continue sur I et f' en est une primitive sur cet intervalle.

Une intégration par parties pour calculer $\int_a^b f''(t)(b-t)\mathbf{d}t$ est envisageable avec : $\begin{cases} u'(t) = f''(t)\,;\, u(t) = f'(t) \\ v(t) = b - t\ ;\, v'(t) = -1 \end{cases}$

Elle donne : $\int_a^b f''(t)(b-t)\mathbf{d}t = [f'(t)(b-t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\mathbf{d}t = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)$ soit :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\mathbf{d}t$$

I.3. La formule de Taylor avec reste intégral aux ordres 1 et 2 vient d'être établie dans les deux questions qui précèdent, respectivement pour les fonctions de classe C^1 et de classe C^2.

Supposons la formule de Taylor établie à un ordre $(n-1)$ où $n \ge 2$ pour toute fonction f de classe C^{n-1}.

C'est-à-dire supposons que : $f(b) = f(a) + \ldots + f^{(n-2)}(a)\dfrac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \int_a^b f^{(n-1)}(t)\dfrac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{d}t$

Soit f de classe C^n sur I. Sa fonction dérivée $(n-1)$-ième est une fonction continûment dérivable sur I.
Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I.

Une intégration par parties pour calculer $\int_a^b f^{(n-1)}(t)\dfrac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{d}t$ est envisageable avec :

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}\ ;\, u(t) = -\dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ u(t) = f^{(n-1)}(t)\ ;\, v'(t) = f^{(n)}(t) \end{cases}$$

Elle donne : $\int_a^b f^{(n-1)}(t)\dfrac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{d}t = \left[-f^{(n-1)}(t)\dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(n)}(t)\dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t$ soit :

$$\int_a^b f^{(n-1)}(t)\frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{d}t = f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t$$

La formule de Taylor avec reste intégral est établie à l'ordre suivant n pour les fonctions de classe C^n.
Elle l'est donc pour toute valeur de $n \ge 1$.

II.1. Soit f de classe C^n sur I. La fonction $f^{(n)}$ dérivée n-ième de f est une fonction continue sur I, de même que la fonction positive $\left|f^{(n)}\right|$.

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. La fonction $\left|f^{(n)}\right|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, donc est bornée sur cet intervalle et y atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée et elle atteint son majorant. Il existe un réel $c \in [a, b]$: $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \left|f^{(n)}(c)\right|$ pour tout réel x de $[a, b]$. Il suffit de poser : $M_n = \left|f^{(n)}(c)\right|$.

II.2. Sous les hypothèses de la question précédente :

$$\left|f(b) - \left(f(a) + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right| = \left|\int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f^{(n)}(t)\right|\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t$$

Or $\displaystyle\int_a^b \left|f^{(n)}(t)\right|\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t \underset{gj2016}{\leq} \int_a^b M_n \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{d}t = \frac{M_n}{(n-1)!}\left[-\frac{(b-t)^n}{n}\right]_a^b = \frac{M_n(b-a)^n}{n!}$

Partie C : un problème de conditions aux bords

I. La fonction g étant deux fois continûment dérivable, la fonction : $g_1(x) = \int_0^x g(t)\mathbf{d}t$ est une primitive de g sur $[0\,;1]$ et c'est une fonction trois fois continûment dérivable. L'ensemble des primitives de g sur $[0\,;1]$ est l'ensemble des fonctions de classe C^3 : $x \mapsto g_1(x) + k$ où k est une constante réelle.
f est une fonction vérifiant $f''(x) = g(x)$ si et seulement si f' est une primitive de g sur $[0\,;1]$, c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto g_1(x) + k$

Ainsi, l'ensemble des fonctions vérifiant $f''(x) = g(x)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^4 définies sur $[0\,;1]$ par : $x \mapsto \int_0^x\left(\int_0^u g(t)\mathbf{d}t + k\right)\mathbf{d}u + k' = \int_0^x\left(\int_0^u g(t)\mathbf{d}t\right)\mathbf{d}u + k\,x + k'$ où k' sont deux constantes réelles.

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = a \\ b = \int_0^1\left(\int_0^u g(t)\mathbf{d}t\right)\mathbf{d}u + k + k' \end{cases}$$, système qui détermine les réels k et k' :

$x \mapsto f(x) = \int_0^x\left(\int_0^u g(t)\mathbf{d}t\right)\mathbf{d}u + \left((b-a) - \int_0^1\left(\int_0^u g(t)\mathbf{d}t\right)\mathbf{d}u\right)x + a$ est l'unique fonction recherchée.

II. En appliquant la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 4 sur $[x, x-h]$ et sur $[x, x+h]$ (où $0 \leq x-h < x+h \leq 1$)

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \underset{gjulia2016}{} \int_x^{x-h} f^{(4)}(t)\frac{(x-h-t)^3}{6}\mathbf{d}t$$

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \int_x^{x+h} f^{(4)}(t)\frac{(x+h-t)^3}{6}\mathbf{d}t$$

Par addition :

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \int_x^{x-h} f^{(4)}(t)\frac{(x-h-t)^3}{6}\mathbf{d}t + \int_x^{x+h} f^{(4)}(t)\frac{(x+h-t)^3}{6}\mathbf{d}t$$

Chacune des deux intégrales peut être majorée :

Quel que soit t de $[x-h,\, x]$: $\left|f^{(4)}(t)\right| = |g''(t)| \le M$ et $-h^3 \le (x-h-t)^3 \le 0$ donc :

$$\left|\int_x^{x-h} f^{(4)}(t)\frac{(x-h-t)^3}{6}\,\mathbf{d}t\right| \le \int_{x-h}^{x}\left|f^{(4)}(t)\right|\frac{|x-h-t|^3}{6}\,\mathbf{d}t \le \frac{M}{6}\int_{x-h}^{x}(t-x+h)^3\,\mathbf{d}t = \frac{M}{6}\left[\frac{(t-x+h)^4}{4}\right]_{x-h}^{x} = \frac{M\,h^4}{24}$$

gjulia2016

Quel que soit t de $[x,\, x+h]$: $\left|f^{(4)}(t)\right| = |g''(t)| \le M$ et $0 \le (x+h-t)^3 \le h^3$ donc :

$$\left|\int_x^{x+h} f^{(4)}(t)\frac{(x+h-t)^3}{6}\,\mathbf{d}t\right| \le \int_x^{x+h}\left|f^{(4)}(t)\right|\frac{|x+h-t|^3}{6}\,\mathbf{d}t \le \frac{M}{6}\int_x^{x+h}(x+h-t)^3\,\mathbf{d}t = \frac{M}{6}\left[-\frac{(x+h-t)^4}{4}\right]_x^{x+h} = \frac{M\,h^4}{24}$$

La somme des intégrales, en valeur absolue, est majorée par la somme de ces majorants :

$$\left|\int_x^{x-h} f^{(4)}(t)\frac{(x-h-t)^3}{6}\,\mathbf{d}t + \int_x^{x+h} f^{(4)}(t)\frac{(x+h-t)^3}{6}\,\mathbf{d}t\right| \le \frac{M\,h^4}{12}$$

Finalement : $\left|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-h^2 f''(x)\right| \le \dfrac{M\,h^4}{24}$, inégalité qu'il reste à diviser membre à membre par le réel *gjulia2016* positif h^2.

III.1. Les relations $2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ permettront de déterminer le vecteur B, à condition de satisfaire en outre deux conventions de nullité :

Au rang 1 : $2u_1 - u_2 = u_0 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = a - \dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = b_1$ assure la convention de nullité au rang zéro.

Au rang n : $2u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = b - \dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = b_n$ assure la convention de nullité au rang n.

Pour $2 \le i \le n-1$: $2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = -\dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{i}{n+1}\right) = b_i$

III.2. En tenant compte que $h = \dfrac{1}{n+1}$; $x_i = i\,h$: d'après la question **II** de cette partie, pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\left|\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2} - g(x_i)\right| \le \frac{M\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{12}$$

gjulia2016 et par suite :

$$\left|f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i) - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 g(x_i)\right| \le \frac{M\left(\frac{1}{n+1}\right)^4}{12}$$

Or, $f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)$ sont les composantes de $A_n F$ tandis que $A_n U = B$ a pour composantes $\dfrac{1}{(n+1)^2}\, g\left(\dfrac{i}{n+1}\right)$ pour $i = 2, \ldots, n-1$.

Les composantes de $A_n(F-U)$ vérifient l'inégalité « $\le \dfrac{M\left(\frac{1}{n+1}\right)^4}{12}$ » pour tous ces rangs.

Quant aux composantes de rang 1 et n respectivement, ce sont $f(x_2)-2f(x_1)\,;\ f(x_0)-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 g(x_1)$ et $f(x_{n-1})-2f(x_n)\,;\ f(x_{n+1})-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 g(x_n)$ (les réels a et b sont comptabilisés dans une composante de B et non de A_nU). Les composantes de rangs 1 et n de $A_n(F-U)$ vérifient aussi l'inégalité.

III.3. Concernant les composantes de $A_n(F-U)$ le maximum β de leurs valeurs absolues est tel que $\beta \leq \frac{M}{12(n+1)^4}$. D'après les résultats de la partie A : $\left|f(x_i)-u_i\right| \leq \frac{M}{12(n+1)^4} \times \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{M}{96(n+1)^2}$

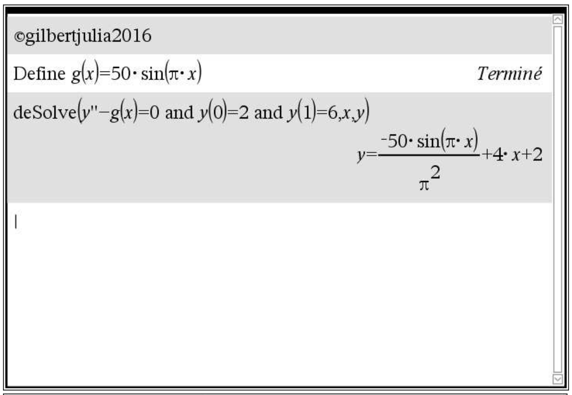
III.4. Cette méthode permet d'obtenir une approximation discrète d'une fonction connaissant sa dérivée seconde et deux conditions aux bornes. Elle est d'autant meilleure que le nombre n de points de subdivision est élevé.

Illustration à l'aide d'un programme

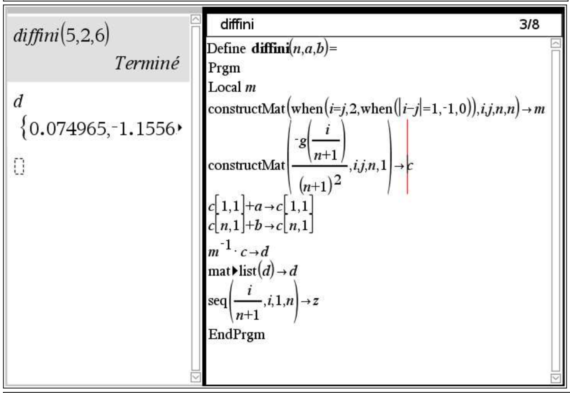
On suppose qu'une certaine fonction g a été définie. On a choisi ici la fonction $g(x)=50\sin(\pi x)$.

Puis on a résolu de façon exacte l'équation différentielle $y''-g(x)=0$ avec deux conditions aux bornes, en l'occurrence $y(0)=2$; $y(1)=6$.

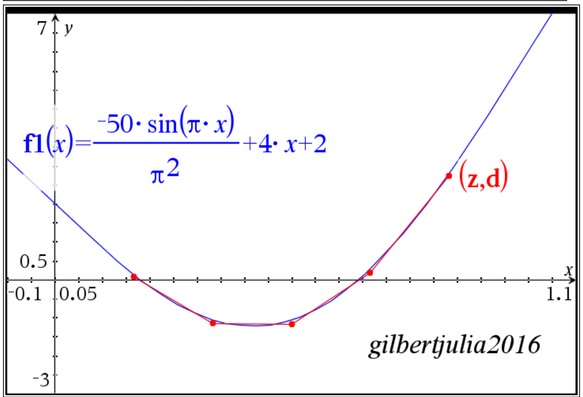
La résolution exacte est possible dans ce cas car on sait expliciter deux primitives successives de $g(x)=50\sin(\pi x)$.



Le programme **diffini** ci-contre est doté de trois arguments : l'entier n, les valeurs aux bornes a et b.
Il construit une approximation discrète en n points de la solution exacte sur $[0\,;1]$ de l'équation $y''-g(x)=0$ avec les conditions aux bornes $y(0)=a$; $y(1)=b$.
La matrice **m** est la matrice A_n du sujet.
La matrice colonne **c** est la matrice B obtenue en **C.III.1**
Le programme construit la matrice des u_i qui est transformée en liste (liste **d**) pour une exploitation ultérieure.
On a exécuté ce programme avec $n=5$



On peut comparer le graphique exact et le nuage des cinq points reliés d'approximation de coordonnées $\left(\dfrac{i}{n+1},u_i\right)$.



Voici un graphique analogue mais avec $n=20$ maintenant.

On observe une superposition plus flagrante de la ligne brisée d'approximation sur le graphique « exact ».

Naturellement, la méthode d'approximation présentée dans ce problème est faite plutôt pour des fonctions dont on ne sait pas expliciter de primitives …