Capes 2016, épreuve 1, problème 1

Ce « problème 1 » est constitué de deux problèmes assez largement indépendants : l'un fait l'objet des parties A, B et C et l'autre fait l'objet des parties D et E avec seulement une allusion à la partie A.

Partie A : interpolation de Lagrange

I. $L_k = \prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}} U_{k,i}$ est un produit de $n-1$ monômes. C'est donc un polynôme de degré $n-1$. Par sa construction il vérifie : $L_k(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \ne k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$.

Supposons qu'il existe un autre polynôme P de degré $n-1$ prenant les mêmes valeurs aux mêmes points. Alors, $P - L_k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui s'annule pour chacun des n réels distincts $a_1,\dots,a_n$. L'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui s'annule en n réels distincts est le polynôme nul : $P - L_k = 0_{\mathbf{R_{n-1}}[X]}$ et $P = L_k$

L_k est l'unique polynôme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie $L_k(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \ne k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$

Une conséquence immédiate en est que pour tout n-uplet de réels $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et tout $i \in [1, n]$: $\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k L_k\right)(a_i) = \alpha_i$.

De ce fait : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k L_k = \mathbf{0}_{\mathbf{R_{n-1}[X]}} \Rightarrow \left[(\forall i \in [1, n]) : \left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k L_k\right)(a_i) = 0\right] \Rightarrow [(\forall i \in [1, n]) : \alpha_i = 0]$.

La famille $(L_1,\dots,L_n)$ est une famille libre de n polynômes de l'espace $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Il est utile de remarquer dès maintenant que, $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ étant un espace vectoriel dont la dimension est égale à n, la famille libre de n éléments $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de cet espace vectoriel.

II. On considère l'application F : $\begin{cases} \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}^n \\ P \mapsto (P(a_1),\dots,P(a_n)) \end{cases}$

II.1. Pour tout réel λ et tout couple de polynômes (P, Q) de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$:
$F(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(a_1),\dots,(\lambda P + Q)(a_n)) = \lambda(P(a_1),\dots,P(a_n)) + (Q(a_1),\dots,Q(a_n)) = \lambda F(P) + F(Q)$. D'où la linéarité de F.

II.2. Pour $k \in [1, n]$: $F(L_k) = e_k$.

II.3. L'image par l'application linéaire F d'une base $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est une base de $\mathbf{R}^n$. L'application F est donc une application linéaire bijective.

III.1 et 2. Posons : $P = \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i) L_i$. Alors, pour tout $k \in [1, n]$: $P(a_k) = \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i) L_i(a_k) = f(a_k)$. Ce qui montre l'existence d'un polynôme qui prend les mêmes valeurs que f aux points a_k et en donne en même temps une expression dans la base $(L_1,\dots,L_n)$. S'il y en avait un autre, la différence des deux polynômes serait un polynôme de degré au plus $n-1$ qui s'annulerait pour n réels distincts : cette différence serait le polynôme nul. Il y a aussi unicité.

Partie B : erreur d'interpolation

I.1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles :

- continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.
- dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$
- telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe au moins un réel c dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Un corollaire utile du théorème de Rolle :
Soit g une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'annulant en k points distincts de l'intervalle $[a, b]$ ($k \geq 2$). Alors sa fonction dérivée g' s'annule en au moins $k-1$ points distincts de l'intervalle $]a, b[$.
En effet, on note $a_1,...,a_k$ les k points distincts où g s'annule, classés par ordre croissant. Alors la fonction g satisfait les conditions du théorème de Rolle dans chacun des $k-1$ intervalles $[a_1, a_2],...[a_{k-1}, a_k]$. Il existe donc au moins $k-1$ réels $c_1,...,c_{k-1}$ tels que : $a \leq a_1 < c_1 < a_2 < ..... < a_{k-1} < c_{k-1} < a_k \leq b$ et vérifiant : $g'(c_1) = ... = g'(c_{k-1}) = 0$.

I.2. Il reste a appliquer ce corollaire à chacune des dérivées successives de g. Au bout de j applications du corollaire $(1 \leq j \leq n-1)$, on parvient à la fonction dérivée j-ième, qui est $n-j$ fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n+1-j$ réels distincts de $]a, b[$. Sa dérivée, la dérivée d'ordre $(j+1)$ de g, s'annule en au moins $(n-j)$ réels distincts de $]a, b[$.
Au bout de $n-1$ applications du corollaire, on parvient à la fonction dérivée $(n-1)$-ième, qui est une fois dérivable sur $[a, b]$ et qui s'annule en au moins deux réels distincts de $]a, b[$. Sa dérivée, la dérivée d'ordre n de g, s'annule en au moins un réel de $]a, b[$.

II.1. P étant le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1,...,a_n$, pour tout $k \in \{1, 2,..., n\}$: $P(a_k) = f(a_k)$. D'autre part, $\prod_{k=1}^{k=n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$ s'annule en chaque point a_k et vaut 1 en c.

Il en résulte que g_c s'annule en les n points $a_1,...,a_n$ et s'annule en outre en c. Elle s'annule donc en au moins $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$.

II.2. La fonction g_c est de la même classe que f : elle est somme d'une fonction qui appartient à $C^n([\mathbf{a,b}])$, la fonction f, et d'une fonction polynôme, indéfiniment dérivable. Cette somme appartient donc à $C^n([\mathbf{a,b}])$. Les hypothèses de **1.1.** sont satisfaites par cette fonction, sa dérivée n-ième s'annule au moins une fois.

II.3. $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$ est un produit de n monômes. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est : $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k}$ $= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (c - a_k)}$. Sa dérivée d'ordre n est une fonction constante, égale à : $(n\,!)\times\left(\dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)}\right)$. On en déduit que : $g_c^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-\big(f(c)-P(c)\big)h_c^{(n)}(x)$ (on note en passant que puisque P est de degré $n-1$, sa dérivée d'ordre n est la fonction nulle).

III.1. La dérivée n-ième de g_c s'annule en au moins un point de $[a,b]$: Il existe un réel ζ de $[a,b]$ tel que :

$$f^{(n)}(\zeta)-\big(_{gjulia2016}\, f(c)-P(c)\big)(n!)\times\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{c-a_k}=0$$ c'est-à-dire tel que : $$f(c)-P(c)=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n!)}\times\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)$$

III.2. Si c est égal à $_{gj2016}$ l'un des a_k : $f(c)-P(c)=\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)=0$ donc identiquement, quel que soit ζ de $[a,b]$:

$$f(c)-P(c)=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n!)}\times\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)$$

III.3. Par définition du max :

- Pour tout réel z de $[a,b]$: $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|$.
- Pour tout réel c de $[a,b]$: $_{gilbertjulia2016}\;\prod_{k=1}^{n}|c-a_k|\le\max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

Quel que soit c appartenant à $[a,b]$: $|f(c)-P(c)|=\left|\dfrac{f^{(n)}(\zeta)}{(n!)}\times\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)\right|\le\dfrac{\left|f^{(n)}(\zeta)\right|}{(n!)}\times\prod_{k=1}^{n}|c-a_k|$

Donc quel que soit c appartenant à $[a,b]$: $|f(c)-P(c)|\le\dfrac{\max_{z\in[a,b]}\left|f^{(n)}(z)\right|}{(n!)}\times\max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

En ne modifiant que les notations : quel que soit x appartenant à $[a,b]$:

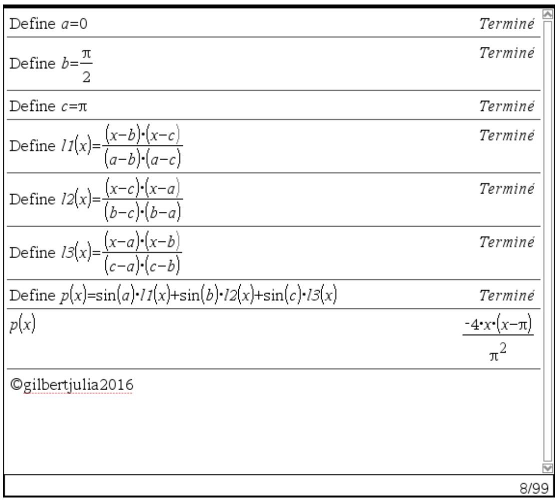
$$|f(x)-P(x)|_{gjulia2016}\le\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|}{(n!)}\times\max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.$$

Partie C : un exemple

Première méthode

I.1. Ici $n=3$, $[a,b]=[0,\pi]$ et $\{a_1,a_2,a_3\}=\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi\right\}$.

On obtient : $P(x)=\dfrac{4x(\pi-x)}{\pi^2}$.



I.2. D'après les parties précédentes gj2016

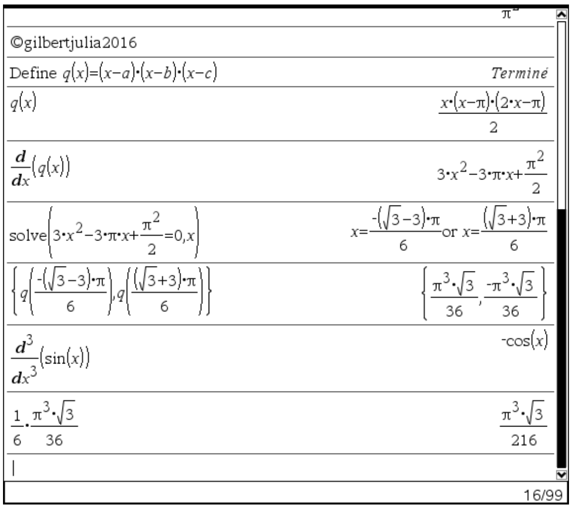
$$|\sin x-P(x)|\le\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|}{(n!)}\times\max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|$$

La dérivée troisième de $\sin x$ est $-\cos x$, majorée en valeur absolue par 1 sur l'intervalle $[0,\pi]$:

$$|\sin-P(x)|\le\frac{1}{6}\times\max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|$$

I.3. $\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)=x\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$ est une fonction polynôme de degré 3 dont la dérivée est la fonction $x\mapsto 3x^2-3\pi x+\dfrac{\pi^2}{2}$. Une étude de variations sommaire de $x\mapsto_{gjulia2016} x\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$ sur $[0,\pi]$ montre que cette fonction y admet un minimum égal à $-\dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{36}$ et un maximum égal à $\dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{36}$. Elle y est majorée en valeur absolue par $\dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{36}$.

En conséquence $|\sin x-P(x)|\le\dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$



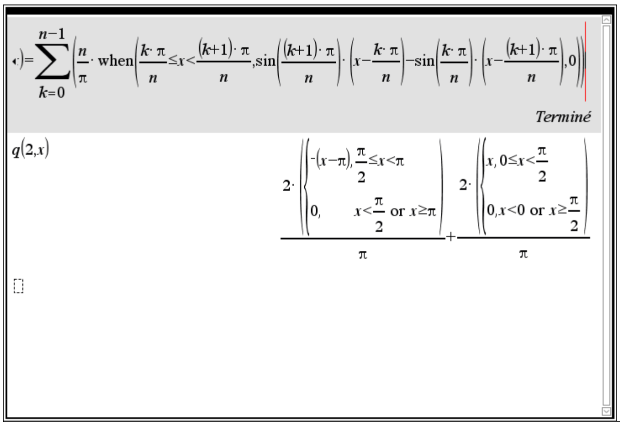
II. Seconde méthode

De façon générale, le polynôme d'interpolation d'une fonction f aux deux points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$ est du premier degré : $P_k(x)=\dfrac{n}{\pi}\left[f\left(\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)\left(x-\dfrac{k\pi}{n}\right)-f\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\left(x-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)\right]$.

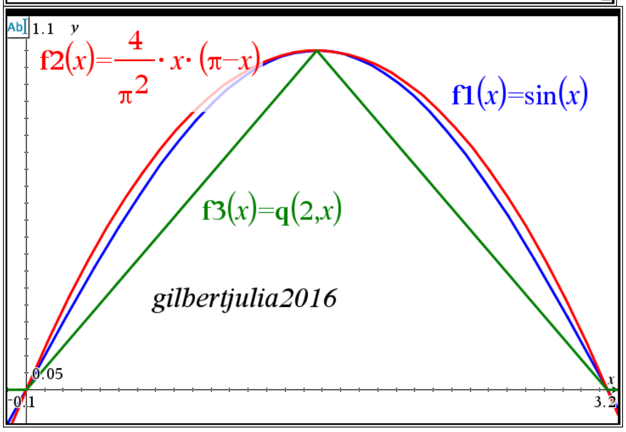
On se souviendra que P_k est tel que : $P_k\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=f\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et $P_k\left(\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)=f\left(\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)$

II.1. Q_1 est la fonction nulle et $Q_2(x)_{gjulia2016}=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi} & si\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{2(\pi-x)}{\pi} & si\ \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$

Il est possible de définir sur calculatrice la fonction Q à l'aide d'une sommation et de la commande « **when** ». $_{gj\,2016}$ En voici un exemple ci-contre.



Représentation graphique de la fonction « première méthode » et de la fonction Q_2.



II.2. Q_n est une fonction affine par morceaux. Elle est continue sur $[0,\pi]$ sauf peut-être aux points de raccordement où elle n'est *a priori* que continue à droite. Il faut vérifier que le raccordement s'effectue par continuité à gauche aux points $\dfrac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots n-1)$:

$$Q_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \lim_{x\to\frac{k\pi}{n}^-} Q_n(x)=\lim_{x\to\frac{k\pi}{n}^-} P_{k-1}(x)=f\left(\frac{k\pi}{n}\right)_{gjulia\,2016}=Q_n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$ Il en est bien ainsi.

II.3. La fonction polynôme du second degré $x\mapsto\left(x-\dfrac{k\pi}{n}\right)\left(x-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)$ est négative entre ses zéros $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$ et elle est minimale pour la demi-somme de ses zéros, c'est-à-dire pour $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ où elle vaut $-\dfrac{\pi^2}{4n^2}$. Ainsi, pour tout x tel que $\dfrac{k\pi}{n}\le x\le\dfrac{(k+1)\pi}{n}$: $-\dfrac{\pi^2}{4n^2}\le_{gjulia\,2016}\left(x-\dfrac{k\pi}{n}\right)\left(x-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)\le 0$.

Dans ces mêmes conditions, en valeur absolue : $\left|\left(x-\dfrac{k\pi}{n}\right)\left(x-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)\right|\le\dfrac{\pi^2}{4n^2}$

II.4. On applique sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k\pi}{n},\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right[$ la majoration :

$$|f(x)-P_k(x)|\le\frac{\max\limits_{x\in\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]}\left|f^{(2)}(x)\right|}{(2!)}\times\max_{x\in\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]}\left(\left|x-\frac{k\pi}{n}\right|\cdot\left|x-\frac{(k+1)\pi}{n}\right|\right).$$

La dérivée seconde de $\sin x$ est $-\sin x$ majorée en valeur absolue par 1 sur $[0,\pi]$ donc *a fortiori* sur tout intervalle $\left[\dfrac{k\pi}{n},\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right[$.

Sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k\pi}{n},\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right[$: $\left|f(x)-P_k(x)\right|_{gjulia2016} \leq \dfrac{1}{2}\times \max\limits_{x\in\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]}\left(\left|x-\dfrac{k\pi}{n}\right|.\left|x-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right|\right)=\dfrac{\pi^2}{8n^2}$.

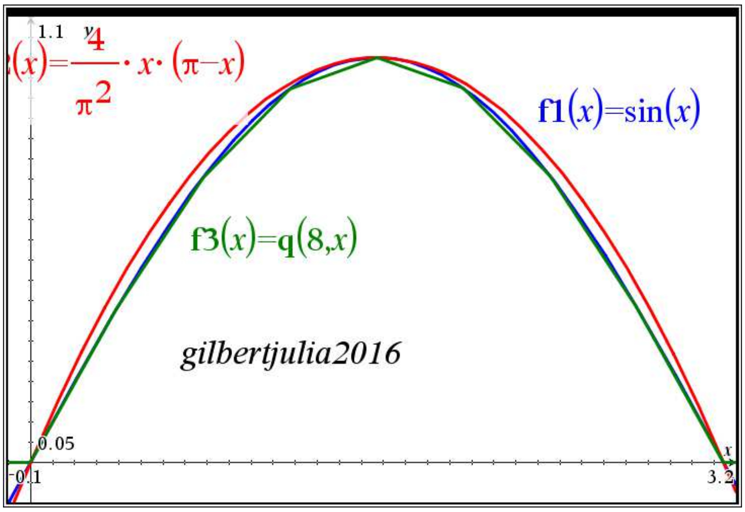
Sur leur réunion : $\left|f(x)-Q_n(x)\right|\leq\dfrac{\pi^2}{8n^2}$ puisque la majoration obtenue est la même, quel que soit l'intervalle $\left[\dfrac{k\pi}{n},\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right[$ dans laquelle $x\in[0,\pi[$ se trouve.

III. Difficile de comparer … Cela dépend de ce que l'on veut.

- La première méthode fournit une fonction polynôme d'interpolation pépère, du second degré, qui approche la fonction sinus à moins de 0,25 près (en réalité, l'interpolation est de meilleure qualité, on approche le sinus à moins de 0,06 près).

- La deuxième méthode fournit une fonction affine $_{gj2016}$ par morceaux, certes un peu usine à gaz. Elle a cependant deux avantages décisifs : on peut programmer la fonction et on peut choisir la qualité d'approximation.

Ci-contre, avec $n=8$ par exemple, on peut conjecturer que l'approximation est meilleure que celle obtenue par la première méthode.



Conclusion des parties A à C

Il s'agit dans ces parties du problème de méthodes « d'interpolation ». Cela sous-entend que l'on est en mesure de calculer par divers moyens des valeurs de f en divers points (entre lesquels on va interpoler).

Concernant la fonction sinus, on peut a priori penser à des sinus constructibles, dont on peut exprimer la valeur exacte à l'aide de radicaux, ce qui est le cas pour des valeurs de n comme 4, 5, 6, 8 … plutôt qu'à des sinus non constructibles dont on ne peut exprimer la valeur exacte ce qui est le cas pour des valeurs de n comme 7, 9, 11, 13...

Partie D : Vandermonde

I. Lorsque $n=2$, le déterminant est a_2-a_1 et lorsque $n=3$, c'est $(a_2-a_3)(a_3-a_1)(a_1-a_2)$

II.1. L'application linéaire $\underset{gjulia2016}{}\begin{cases}\mathbf{R}_{n-1}[X]\to\mathbf{R}^n\\ P\mapsto (P(a_1),\ldots,P(a_n))\end{cases}$ a pour matrice A lorsque $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est muni de la base $\{1, X, X^2,\ldots,X^{n-1}\}$ et $\mathbf{R}^n$ de sa base canonique

II.2. Si les a_i sont deux à deux distincts, il a été établi dans la partie A que F est bijective. Alors le déterminant de sa matrice A dans les bases précitées est non nul.

II.3. Si deux des a_i sont égaux, deux des lignes de la matrice A sont identiques : le déterminant de A est nul.

II.4. Le déterminant de A est non nul si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

III.1. Il suffit de développer ce polynôme de degré $(n-1)$.

III.2. Par linéarité : $C_n+\lambda_{n-2}C_{n-1}+\ldots+\lambda_0C_1 \underset{gjulia2016}{=} \begin{pmatrix}P(a_1)\\P(a_2)\\\ldots\\P(a_n)\end{pmatrix}$ et P s'annule aux points $a_1,\ldots,a_{n-1}$

III.3. On ne modifie pas $_{gj2016}$ le déterminant d'une matrice si, à l'une de ses colonnes, on ajoute une combinaison linaire des autres colonnes.
Le déterminant de la matrice A est le même que celui de la matrice obtenue en remplaçant sa colonne C_n par la colonne $C_n+\lambda_{n-2}C_{n-1}+\ldots+\lambda_0C_1$ c'est-à-dire par la colonne $\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\P(a_n)\end{pmatrix}$. En développant par rapport aux termes de sa dernière colonne le déterminant de la matrice obtenue, on obtient le résultat.

III.4. Posons $P_{n-1}=P$ pour homogénéiser les notations de cette question. En itérant le procédé précédent, on est amené à considérer les polynômes : $P_{n-2}(X)=(X-a_1)\ldots(X-a_{n-2})$ et plus généralement, pour $k\le n-1$: $P_k(X)=(X-a_1)\ldots(X-a_k)$ ceci jusqu'au polynôme : $P_1(X)=X-a_1$

On obtient que $\det(A)=\prod_{i=1}^{i=n-1}P_i(a_{i+1})$

On note que : $P_{n-1}(a_n)=\prod_{k=1}^{k=n-1}(a_n-a_k)=\prod_{1\le k\le n-1}(a_n-a_k)$ tandis que, plus généralement, pour $i=1,\ldots,n-1$: $P_i(a_{i+1})=\prod_{k=1}^{k=i}(a_{i+1}-a_k)=\prod_{1\le k\le i}(a_{i+1}-a_k)$.

Ce qui donne : $\det(A)\underset{gjulia2016}{=}\prod_{i=1}^{i=n-1}\left(\prod_{1\le k\le i}(a_{i+1}-a_k)\right)$, formule équivalente à celle de l'énoncé avec $l=i+1$

III.5. Le déterminant de A est nul, et A est non inversible, si et seulement si l'un des facteurs de $\det(A) = \prod_{i=1}^{i=n-1}\left(\prod_{1\le k\le i}(a_{i+1}-a_k)\right)$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si deux des a_i sont égaux.

Partie E.

I.1. Le système d'équations est la traduction analytique du passage de la parabole par les trois points et en tant que telle, l'équivalence est de plein droit. Je ne vois pas ce qu'il y a à démontrer.

I.2. Les trois points étant deux à deux distincts, si deux d'entre eux ont la même abscisse, alors ils ont des ordonnées différentes. Le système possède deux lignes aux premiers membres identiques mais aux seconds membres différents : il y a dans ce système deux équations incompatibles. Le système n'a pas de solution.

I.3.1. Si les abscisses sont deux à deux distinctes, alors le déterminant du système est non nul. Ce système a un triplet solution et un seul.

I.3.2. D'après les résultats usuels de résolution d'un système 3x3 : $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 1 & a_2 & a_2^2\\ 1 & a_3 & a_3^2\end{vmatrix}}$

I.3.3. On ne modifie pas le déterminant d'une matrice si on soustrait une de ses lignes aux autres lignes : $\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 0 & a_2-a_1 & b_2-b_1\\ 0 & a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix}$ en soustrayant la première ligne aux deux autres puis en développant suivant les termes de la première colonne.

$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix} = 0$. Les deux premières propositions de l'énoncé sont équivalentes.

Mais (a_2-a_1, b_2-b_1) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ et (a_3-a_1, b_3-b_1) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1A_3}$. Les trois points A_1, A_2, A_3 sont alignés si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ sont colinéaires donc si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées est nul.

Ce déterminant, qui est $\begin{vmatrix}a_2-a_1 & a_3-a_1\\ b_2-b_1 & b_3-b_1\end{vmatrix}$, est égal au déterminant de la transposée $\begin{vmatrix}a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix}$. D'où l'équivalence entre les trois propositions de l'énoncé.

I.3.4. Le problème admet une solution, c'est-à-dire une parabole non dégénérée passant par les trois points, si et seulement si le système d'équations admet une solution et si en outre $\alpha \neq 0$.

- Le système d'équations admet une solution si et seulement si les abscisses des trois points sont deux à deux distinctes c'est-à-dire si et seulement si deux des trois points ne sont jamais sur une même droite d'équation $x = C$. *Idem est* : si et seulement si aucune des trois droites (A_1A_2) ; (A_2A_3) ; (A_3A_1) n'est parallèle à l'axe des ordonnées D du repère choisi.
- $\alpha \neq 0$ si et seulement si A_1, A_2, A_3 sont non alignés.

II.1. On vient de le dire.

II.2. Dans ce qui précède, l'axe D a été choisi arbitrairement.
On a trouvé une parabole $_{gj\,2016}$ solution à la condition nécessaire et suffisante que D ne soit parallèle à aucune des trois droites $(A_1A_2);(A_2A_3);(A_3A_1)$.

La direction de l'axe de la parabole recherchée peut être celle qu'on veut sauf trois directions particulières, celles des droites $(A_1A_2);(A_2A_3);(A_3A_1)$. Il reste nonobstant ces trois exceptions une infinité de choix possibles pour la direction de cet axe …