Capes 2015, épreuve 2, problème 2

Partie A

Je passe sur la question I.

II. 1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$: l'arbre possède un axe de symétrie et la symétrie axiale par rapport à cet axe échange les noeuds « 1 » et les nœuds « 0 ». L'image d'un chemin est le chemin où les « 0 » et les « 1 » sont échangés. Ainsi, l'ensemble des chemins comportant k fois un « 1 » est échangé avec l'ensemble des chemins comportant k fois un « 0 » (et $n-k$ fois un « 1 »). Les deux ensembles ont donc le même cardinal.

2. $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$. On réalise une partition de l'ensemble des $(n+1)$-uplets comportant k fois un « 1 » en considérant d'une part ceux qui se terminent par « 0 » et d'autre part ceux qui se terminent par « 1 » (puisque $k>0$, il y en a des deux sortes) …

3. Construire la matrice A de cette question impose de numéroter les $\binom{n}{k}$ chemins (c'est l'indice ligne qui impose cette numérotation). $a_{i\,j}=1$ si et seulement si le tirage numéro j du chemin numéro i est un succès.

$\sum_{j=1}^{j=n} a_{i\,j}=k$ quel que soit l'indice i car par définition de A chaque ligne de la matrice est un n-uplet composé de k « 1 » et $n-k$ « 0 ».

$\sum_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} a_{i\,j}=\binom{n-1}{k-1}$ car il y a $\binom{n-1}{k-1}$ chemins pour lesquels $a_{i\,j}=1$ (c'est-à-dire pour lesquels le tirage numéro j est un succès : pour de tels chemins, le $(n-1)$-uplet concernant les $n-1$ autres tirages doit comporter exactement $k-1$ autres « 1 »)

Si on calcule de deux façons la somme des termes de la matrice A, on obtient d'une part $k\binom{n}{k}$ en sommant ligne par ligne et d'autre part $n\binom{n-1}{k-1}$ en sommant colonne par colonne. D'où l'égalité des deux nombres.

4.1. Soit $E=\{1\,;2\,;...;\,n\}$un ensemble à n éléments. À chaque partie A de E on associe le n-uplet $(u_1,...,u_n)$ tel que, pour tout entier k appartenant à $\{1\,;2\,;...;\,n\}$: $\begin{cases} u_k=1 \text{ si } k\in A \\ u_k=0 \text{ si } k\notin A \end{cases}$.

Soit $A\mapsto i(A)$ l'application ainsi construite, clairement bijective de l'ensemble $P(E)$ des parties de E vers l'ensemble des n-uplets tels que définis ci-dessus.
L'image par i de l'ensemble des parties de E contenant p éléments est l'ensemble des n-uplets de somme p.
Ces deux ensembles ont donc le même cardinal, les deux définitions sont cohérentes.

…

Partie B

I. 1.	*valeurs de X_4*	- 4	- 2	0	2	4
	probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2 à 4. $X_n = n - 2D_n$ où D_n suit la loi $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$. L'espérance de D_n étant égale à $\frac{n}{2}$, par linéarité celle de X_n est égale à zéro. L'origine est la position d'équilibre du point dont on étudie le déplacement.

II. Lorsque n est impair, mettons $n = 2m+1$, alors : $X_{2m+1} = 2m+1-2D_{2m+1}$ ne prend que des valeurs impaires. En particulier, $p(X_{2m+1} = 0) = 0$

Lorsque n est pair, mettons $n = 2m$, alors : $X_{2m} = 2m - 2D_{2m}$ et en particulier $X_{2m} = 0 \Leftrightarrow D_{2m} = m$. De ce fait : $p(X_{2m} = 0) = p(D_{2m} = m) = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \times \frac{1}{2^{2m}}$. Par exemple : $p(X_4 = 0) = \frac{4!}{(2!)^2} \times \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}$

IV. 1. Dans cette partie : $X_{2n} = 2n - 2D_{2n}$, ce qui implique que X_{2n} est un nombre pair, et vu que $-2n \le D_{2n} \le 2n$: $-2n \le X_{2n} \le 2n$ aussi.

2. $X_{2n} = 2k \Leftrightarrow D_{2n} = n - k$ ainsi : $p(X_{2n} = 2k) = p(D_{2n} = n-k) = \binom{2n}{n-k} \times \frac{1}{2^{2n}}$

3. On note plutôt Ω_k la variable aléatoire qui vaut 1 si à l'issue du $2k$-ème lancer le point est à l'origine du repère et 0 sinon. de la sorte : $p(\Omega_k = 1) = p(X_{2k} = 0) = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{1}{4^k}$ et $E(\Omega_k) = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{1}{4^k}$.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \quad \text{et} \quad E(C_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\Omega_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} \times \frac{1}{4^k}$$

Lorsque $n = 1$, $\frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 = \frac{3}{4} \times 2 - 1 = \frac{1}{2}$, ce qui correspond à la valeur facilement calculée directement $E(C_1) = \frac{1}{2}$. La relation de récurrence proposée est initialisée.

En règle générale, $E(C_{n+1}) = E(C_n) + \binom{2(n+1)}{n+1} \times \frac{1}{4^{n+1}}$

On note que : $\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$ et donc que, inversement, $\binom{2n}{n} = \frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2(n+1)}{n+1}$

Supposons la relation exacte à l'ordre n : $E(C_n) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$

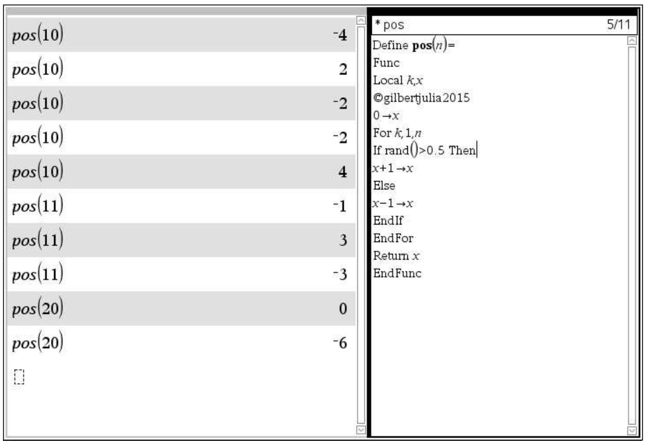
$$E(C_{n+1}) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{n+1}{2(2n+1)} \times \binom{2(n+1)}{n+1} - 1 + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}$$

Soit : $E(C_{n+1})=\left(\frac{1}{4^n}\times\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\times\binom{2(n+1)}{n+1}-1$.

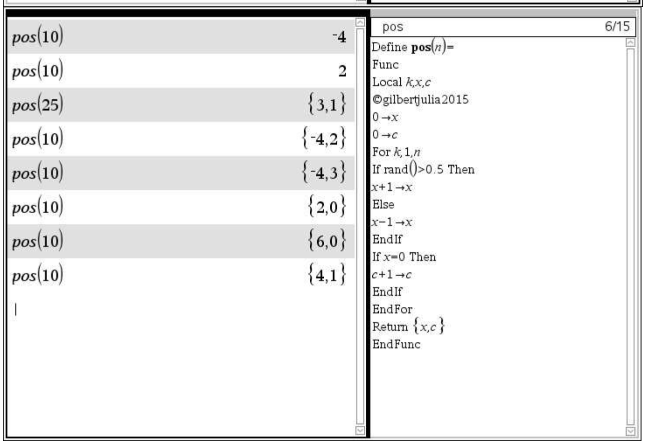
Ce qui donne : $E(C_{n+1})=\frac{2n+3}{4^{n+1}}\times\binom{2(n+1)}{n+1}-1$ et prouve l'hérédité de la relation de récurrence.

Des algorithmes

La fonction **pos** renvoie une position du point après n lancers. On conjecture éventuellement que l'abscisse x du point a la même parité que le nombre de lancers.

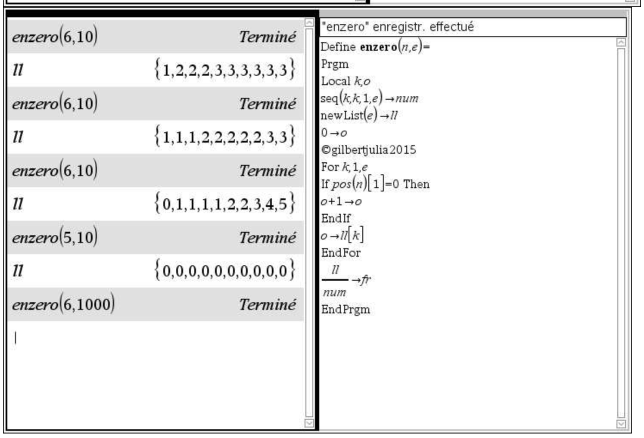


La fonction **pos** a été modifiée de façon qu'elle renvoie, sous forme de liste, l'abscisse x du point après n lancers et le nombre c de passages à l'origine.



Le programme **enzero** simule e séries de n lancers et enregistre en liste **ll** le nombre de fois où le point est à l'origine après n lancers.

Il ne reste plus qu'à lancer le programme pour $e=1000$ et pour une valeur de n « raisonnable » (par exemple $n=6$)



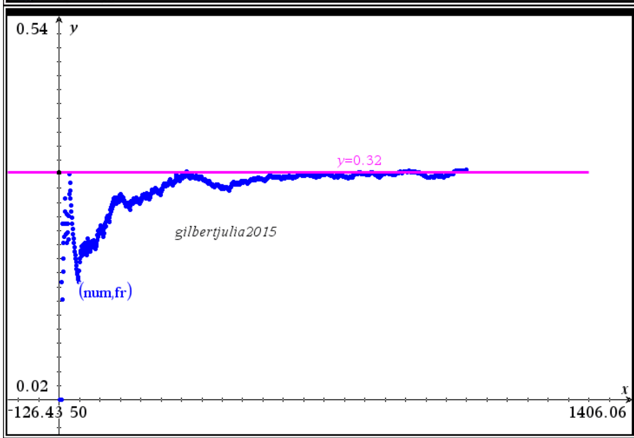
Les résultats peuvent être affichés dans une page Tableur & listes.
La dernière fréquence observée est rappelée en cellule D1.

On la comparera avec la probabilité théorique. Pour $n=6$ par exemple cette probabilité est $\frac{5}{16}$.

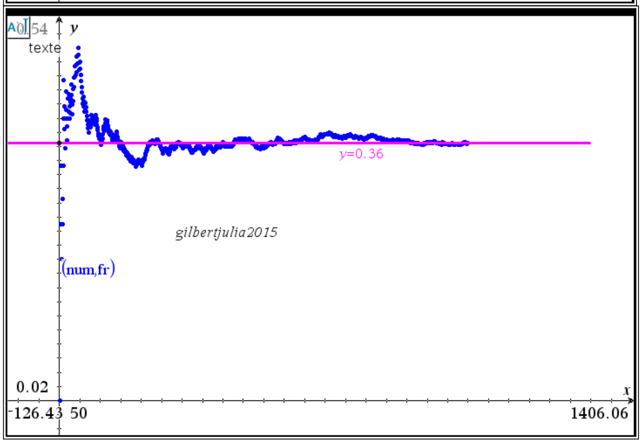
	A num	B ll	C fr	D	E	F	G	H
=								
1	1.	0.	0.	0.326				
2	2.	0.	0.					
3	3.	0.	0.					
4	4.	0.	0.					
5	5.	0.	0.					
6	6.	1.	0.167					
7	7.	1.	0.143					
8	8.	2.	0.25					
9	9.	2.	0.222					
10	10.	2.	0.2					
11	11.	2.	0.182					

D1 =fr[1000]

Une représentation graphique du nuage de points « fréquences » en fonction du « nombre d'essais » est peut-être plus parlante.



Même travail avec $n=4$; $e=1000$



L'exploitation que le professeur peut en faire :

- Favoriser l'appropriation de la situation (cas de la fonction **pos**).
- Mettre en place une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel (cas de la simulation de 1000 séries de lancers).

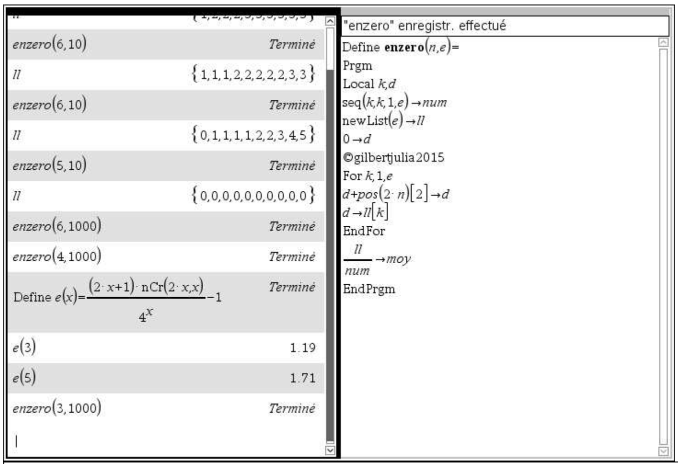
Cette simulation peut être utilisée à deux moments différents : soit pour *conjecturer* la valeur de $p(X_n=0)$ pour une « petite » valeur de n avant de la calculer effectivement soit pour *valider* la valeur de $p(X_n=0)$ déjà obtenue par le calcul.

Dans le cas où l'on commence par faire calculer la valeur exacte et où l'on fait vérifier qu'une fréquence observée est bien dans un intervalle de confiance que l'on explicite (c'est ce que l'on espère du moins …), on fera remarquer qu'une telle vérification peut nous conforter dans notre idée que le résultat est correct, mais ne permet pas d'en acquérir la certitude. On saura seulement que notre résultat est *plausible*, il n'y a pas de validation incontestable.

Pour aller un peu plus loin

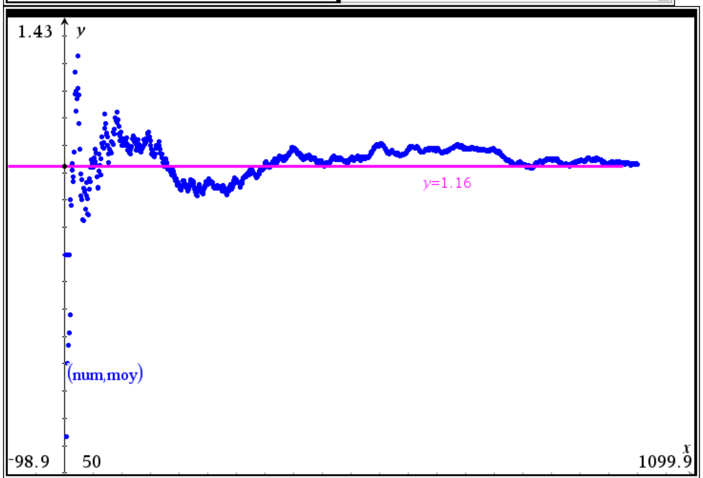
Il y a peu à modifier pour obtenir un nouvel algorithme adapté à la question **IV**.

Le programme **enzero** enregistre maintenant le nombre de passages par l'origine et en liste la moyenne en liste **moy**. Noter que la fonction **pos** s'applique maintenant à l'entier $2n$ et non plus à l'entier n, de façon à s'adapter aux notations de la question **IV**.



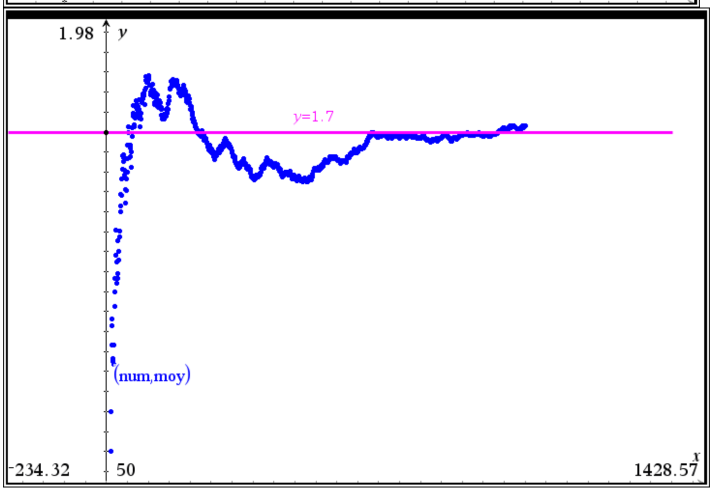
On a exécuté ce nouveau programme avec $e=1000$ et $n=3$.

Représentation graphique de l'évolution de la moyenne des passages à l'origine en fonction du nombre d'essais et ajustement empirique dans le cas $n=3$.



Il semble que, dans ce nouveau contexte, l'aspect « conjecture préalable au calcul effectif » soit assez séduisant.

Même travail avec $n=5$.



Il resterait à voir dans quelle mesure la moyenne observée est « proche » de l'espérance, mais ça, c'est un autre problème.