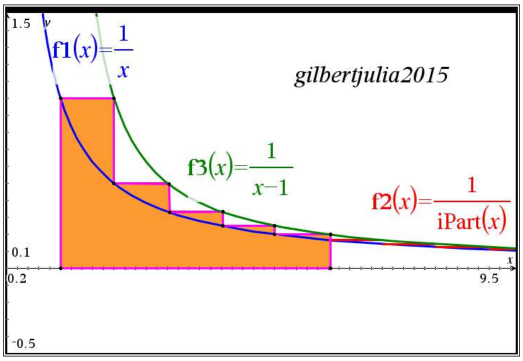
Capes 2015, épreuve 1, problème 2

Sujet portant sur la notion de moyenne de Césaro.

Partie A

Je passe sur la question I.



II. 1. Pour chaque entier k tel que $1\leq k\leq n$, et pour tout réel x tel que $k\leq x<k+1$, la partie entière de x est : $[x]=k$

$a_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$ représente l'intégrale de la fonction $x\mapsto\frac{1}{[x]}$ (inverse de la fonction partie entière) sur l'intervalle $[1,\, n+1]$.

II. 2.1. $a_{2n}-a_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ car pour chaque entier k tel que $n+1\leq k\leq 2n$, $\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}$.

2.2. ***Solution 1*** : Pour tout entier $p\geq 1$: $\begin{cases} a_2-a_1\geq\frac{1}{2}\\ a_4-a_2\geq\frac{1}{2}\\ \dots\text{.}_{\textit{gjulia 2015}}\\ a_{2^p}-a_{2^{p-1}}\geq\frac{1}{2}\end{cases}$. Par somme téléscopique : $a_{2^p}-a_1\geq\frac{p}{2}$.

La suite $(a_n)_{n\in N^*}$ est une suite strictement croissante (c'est clair) et non majorée, elle diverge.

Solution 2 : raisonnement « par l'absurde ». Supposons cette suite convergente et soit l sa limite hypothétique.
Alors : $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=l$ puisque $(a_{2n})_{n\in N^*}$ est une suite extraite de la suite convergente $(a_n)_{n\in N^*}$.

D'une part $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-a_n)\geq\frac{1}{2}$ d'après le résultat **2.1** et d'autre part $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-a_n)=l-l=0$ comme limite d'une somme de deux suites convergentes. L'hypothèse de convergence conduit à deux conclusions contradictoires, elle n'est pas recevable.
(Personnellement, je préfère la solution 1)

3. On peut obtenir légèrement mieux que ce qui est demandé, compte tenu de l'interprétation graphique qui a été faite. Mais au final, les inégalités demandées par l'énoncé suffisent à l'emploi qu'on en fait :

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Pour tout réel x, $x-1<[x]\leq x$ Donc, pour tout réel x strictement supérieur à 1 : $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{[x]}\geq\frac{1}{x}$. En conséquence : $a_n=\int_1^{n+1}\frac{1}{[x]}dx\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)$ et d'autre part :

$a_n - 1 = a_n - a_1 = \int_2^{n+1} \frac{1}{[x]} dx < \int_2^{n+1} \frac{1}{x-1} dx = \ln n$.

En résumé : $\ln(n+1) \le a_n < \ln n + 1$ pour tout entier $n \ge 1$.

A fortiori : $\ln n < a_n < \ln n + 1$, ce qui est l'inégalité demandée.

En supposant $n \ge 2$ pour pouvoir diviser par $\ln n$: $1 < \frac{a_n}{\ln n} < 1 + \frac{1}{\ln n}$.

La suite $n \mapsto \frac{a_n}{\ln n}$ définie pour $n \ge 2$ est minorée par 1 et majorée par une suite convergeant vers 1 : elle converge elle-même vers 1. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{\ln n} \right) = 1$ et $a_n \underset{+\infty}{\approx} \ln n$

4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $0 < b_n < 1$. La suite $(b_n)_{n \in N^*}$ est bornée.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$. Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant strictement décroissante sur tout intervalle $[n, n+1]$: $\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{\mathbf{d}x}{x} \ge \int_n^{n+1} \frac{\mathbf{d}x}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $b_{n+1} - b_n \le 0$. La suite $(b_n)_{n \in N^*}$ est décroissante.

Cette suite étant décroissante et minorée, elle converge.

Partie B

I.1. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est de limite nulle : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}^*) : n \ge n_0 \Rightarrow |u_n| \le \varepsilon$

Pour $n \ge n_0$: $v_n - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right)$ donc : $\left| v_n - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \right| = \frac{1}{n}\left| \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right| \le \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \le \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon$

On obtient : $\left| v_n - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \right| \le \frac{(n-n_0)}{n} \varepsilon \le \varepsilon$ ou, ce qui revient au même : $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \le v_n \le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.

Le réel strictement positif ε étant fixé, soit n_1 le premier entier supérieur ou égal au réel $\frac{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right|}{\varepsilon}$.

Lorsque $n \ge n_1$, $\left| \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \right| \le \frac{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right|}{n_1} \le \varepsilon$ *gjulia 2015* ou, ce qui revient au même : $-\varepsilon \le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \le \varepsilon$

Si on note : $n_2 = \sup(n_0, n_1)$ alors : $n \ge n_2 \Rightarrow -2\varepsilon \le v_n \le 2\varepsilon$.

Quel que soit ε strictement positif, on peut trouver un entier n_2 tel que : $n \ge n_2 \Rightarrow |v_n| \le 2\varepsilon$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de limite nulle.

Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est de limite nulle, alors sa moyenne de Césaro est aussi de limite nulle. La réciproque est fausse, comme le montrerait facilement le cas de la suite $u_n = (-1)^n$, divergente mais dont la moyenne de Césaro converge vers zéro car : $\begin{cases} v_{2p} = \frac{-1}{2p} \\ v_{2p+1} = 0 \end{cases}$ suivant la parité de l'indice. Mais on verra ça plus tard.

2. On considère la suite auxiliaire $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que : $e_n = u_n - l$.

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l = v_n - l$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de limite *l* si et seulement si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est de limite nulle.

$(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de limite nulle implique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$ de limite nulle.

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$ de limite nulle équivaut au fait que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de limite *l*.

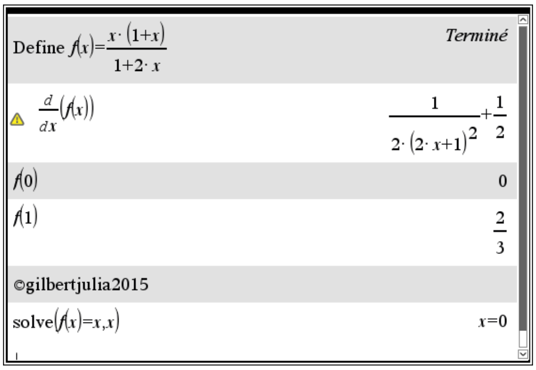
Au final, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est de une suite de limite *l* alors sa moyenne de Césaro est elle aussi de limite *l*.

II.1 et 2.
Méthode 1

- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de termes strictement positifs, par récurrence facile : $x_1 = 1$ et pour tout entier n : $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0$ car x_{n+1} se construit à partir de x_n par un cocktail d'opérations laissant stable **R*+** (additions, multiplication et division).
- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite strictement décroissante car pour tout entier *n* de **N*** : $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ce qui est un critère de stricte décroissante pour les suites de réels strictement positifs. En effet, pour tout entier *n* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+x_n}{1+2x_n} < 1$ vu que $1 + x_n < 1 + 2x_n$.

Méthode 2

Une étude sommaire de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x(1+x)}{1+2x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ fait apparaître que cette fonction est strictement croissante sur cet intervalle, qu'elle laisse stable : $f([0, 1]) = \left[0, \frac{2}{3}\right] \subset [0, 1]$



La suite proposée étant définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ et initialisée par $x_1 = 1$, on en tire les conclusions suivantes :

- Tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont dans l'intervalle $[0, 1]$, stable par *f*.
- Puisque *f* est strictement croissante, la suite est strictement monotone, et vu que $x_2 = \frac{2}{3} < x_1$ cette suite est strictement décroissante (deux termes consécutifs quelconques sont rangés dans le même ordre que les deux premiers).

3. *Quelle que soit la méthode utilisée ci-dessus :*
Cette suite converge puisqu'elle est décroissante minorée vers une limite *l* telle que $0 \le l < 1$.
Puisque *f* est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$, elle est continue en *l*. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne peut converger que vers un point fixe de *f*, solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Elle converge donc vers zéro.

4. Un calcul facile montre que pour tout réel *x* de $]0, 1]$: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1}$. Lorsque $x = x_n$, cela donne :

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n + 1}$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de limite nulle et que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est continue en zéro, la suite $\left(u_n = \dfrac{1}{x_n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a pour limite la valeur de continuité en ce point c'est-à-dire 1.

$v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_{k+1}} - \dfrac{1}{x_k}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_1}\right) = \dfrac{1}{n\,x_{n+1}} - \dfrac{1}{n}$.

Puisque cette suite est la moyenne de Césaro de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ elle a aussi pour limite 1. Il existe une suite e de limite nulle telle que : $v_n = 1 + e_n$ pour tout entier n.

$x_n = \dfrac{1}{1+n v_{n-1}} = \dfrac{1}{1+n+n e_{n-1}} = \dfrac{1}{1+n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}e_{n-1}}\right)_{gjulia 2015}$ ce qui fait apparaître que $x_n \underset{\infty}{\approx} \dfrac{1}{1+n}$.

On peut écrire aussi, plus tarabiscoté, $x_n = \dfrac{1}{n} \times \left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}e_{n-1}}\right)\right]_{gjulia 2015}$ pour conclure $x_n \underset{\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers zéro à la vitesse de $\dfrac{1}{n}$, il s'agit d'un exemple de convergence lente dans le sens « plus lentement qu'une convergence géométrique ».

III.1. La suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la différence de deux suites convergentes de même limite l. Elle est convergente et converge vers zéro, la différence des limites.

2.1. Si la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers l non nul :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}^*) : n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon \leq x_{n+1} - x_n \leq l + \varepsilon$

Soit donc ε un réel strictement positif fixé et n_0 un entier tel que ci-dessus.

Pour $n > n_0$: $x_n - x_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{k=n-1}(x_{k+1} - x_k)$ et donc : $(n-n_0)(l-\varepsilon) \leq x_n - x_{n_0} \leq (n-n_0)(l+\varepsilon)$ et par suite :

$\dfrac{x_{n_0}}{n} + \left(1 - \dfrac{n_0}{n}\right)(l-\varepsilon) \leq \dfrac{x_n}{n} \leq \dfrac{x_{n_0}}{n} + \left(1 - \dfrac{n_0}{n}\right)(l+\varepsilon)$. On a obtenu un encadrement de $\dfrac{x_n}{n}$ par les termes correspondants de deux suites, l'une qui converge vers $l-\varepsilon$, l'autre vers $l+\varepsilon$. On peut trouver un entier n_1 supérieur à n_0 tel que, en même temps : $\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{x_{n_0}}{n} - \dfrac{n_0}{n}(l-\varepsilon)\right| \leq \varepsilon \\ \left|\dfrac{x_{n_0}}{n} - \dfrac{n_0}{n}(l+\varepsilon)\right| \leq \varepsilon \end{array}\right._{gjulia 2015}$. Alors : $n \geq n_1 \Rightarrow l - 2\varepsilon \leq \dfrac{x_n}{n} \leq l + 2\varepsilon$

Ce qui montre que la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et converge vers l.

2.2. Si l est non nul : $n \geq n_1 \Rightarrow (l-2\varepsilon)n \leq x_n \leq (l+2\varepsilon)n$ avec les notations ci-dessus. Il suffit de choisir par exemple $\varepsilon = \frac{|l|}{3}$ pour obtenir un encadrement par deux termes de suites divergentes, toutes les deux vers $-\infty$ ou toutes les deux vers $+\infty$ selon que l est négatif ou positif. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge.

2.3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de la partie **A** est un contre-exemple : elle diverge alors que $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers zéro.

Partie C

L'invalidité de la réciproque a été évoquée …

II.1. Dans ce cas, on obtient $u_n = (-1)^n$ déjà vu.

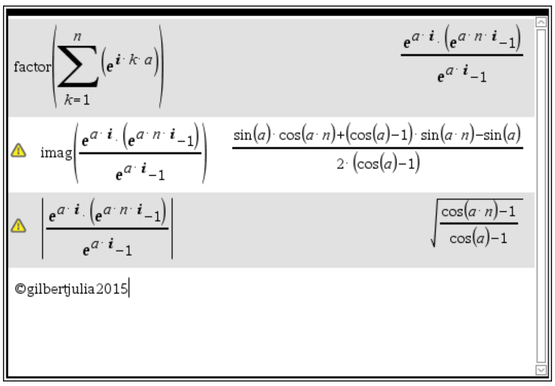
II.2. $\sin(n+2)a - \sin na = 2\sin a \times \cos(n+1)a$ et $\sin(n+2)a + \sin na = 2\cos a \times \sin(n+1)a$
$u_{n+2} - u_n = 2c_{n+1}\sin a$ et $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}\cos a$

3. Dans cette question, $\sin a \neq 0$ et $|\cos a| \neq 1$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, alors la suite définie par $c_n = \frac{1}{2\sin a}(u_{n+1}-u_{n-1})$ est convergente comme combinaison linéaire de suites convergentes et converge vers la même combinaison des limites c'est-à-dire vers zéro.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, alors elle converge vers une solution de l'équation : $l + l = 2l\cos a$ c'est-à-dire vers zéro.
Mais il n'est pas possible que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent toutes les deux vers zéro car $u_n^{\ 2} + c_n^{\ 2} = 1$ pour tout entier n : la somme des carrés des limites devrait être égale à 1. L'hypothèse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ conduit à une contradiction. Cette suite est nécessairement divergente.

$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(\exp(i\,ka)) = \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\exp(i\,ka)\right)$. Or : $\sum_{k=1}^{n}\exp(i\,ka) = \exp(i\,a)\frac{\exp(i\,ka)-1}{\exp(i\,a)-1}$

La partie imaginaire de ce nombre, dont le calcul est facultatif, est majorée en valeur absolue par le module du même nombre, plus facile à calculer, égal à $\sqrt{\frac{1-\cos na}{1-\cos a}}$, qui est lui-même majoré par $\sqrt{\frac{2}{1-\cos a}}$.



Ainsi : $|v_n| \leq \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{1-\cos a}}$ pour tout entier n.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers zéro.

III.1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant supposée croissante, pour tout entier n : $k \geq n+1 \Rightarrow u_k \geq u_{n+1}$. En conséquence : $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = n u_{n+1}$

2. $v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k$ donc $2v_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = v_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

Compte tenu de la question **1** : $2v_{2n} - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq u_{n+1}$

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant supposée convergente est bornée. Il en est de même de la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui est extraite de la précédente. La suite $(2v_{2n} - v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite bornée, en particulier majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc elle-même majorée. Etant croissante et majorée, elle converge. Si v est la limite de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et u celle de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, en passant à la limite dans $2v_{2n} - v_n \geq u_{n+1}$, on obtient $v \geq u$.

Mais d'autre part, pour tout entier n, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n = u_n$, la moyenne de Césaro d'une suite croissante est plus petite que la suite elle-même. En passant à la limite $v \leq u$ et finalement $v = u$

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ était supposée décroissante, on aurait la même conclusion (la suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est alors croissante).

4. On peut énoncer : soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite monotone. Elle converge si et seulement si sa moyenne de Césaro converge et ces deux suites ont alors la même limite.