CAPES 2015. EPREUVE 1, PB 1

Sujet traitant un problème d'optimisation à l'aide des nombres complexes. Le cas de la somme des distances à trois points du plan amène à la notion de point de Torricelli d'un triangle.

I.1. On pose $z = x + i\,y$.

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La fonction racine carrée étant une fonction strictement croissante, quels que soient les réels x et y : $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$, l'égalité n'ayant lieu que si $x^2 + y^2 = x^2$, c'est-à-dire que si $y = 0$
- Tout réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue : $x \leq |x|$, l'égalité n'ayant lieu que si $x \geq 0$

Donc, $|z| - x \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $y = 0$ et $x \geq 0$, c'est-à-dire que si z est un nombre réel positif.

I.2. Les réels positifs $|z_1 + z_2|$ et $|z_1| + |z_2|$ sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

D'une part $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

D'autre part $\left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

$\left(|z_1| + |z_2|\right)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2\left|z_1\overline{z_2}\right| - 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \geq 0$ d'après la question 1.

Donc, quels que soient z_1 et z_2, $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$.

I.3. L'égalité n'a lieu que s'il existe un réel positif α (strictement puisque z_1 et z_2 sont supposés tous deux non nuls) tel que : $z_1\overline{z_2} = \alpha$.

Puisque $\overline{z_2} = \dfrac{|z_2|^2}{z_2}$, $z_1\overline{z_2} = \alpha \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{\alpha}{|z_2|^2} z_1$. Le réel $\lambda = \dfrac{\alpha}{|z_2|^2}$ étant un réel strictement positif si et seulement si α en est un, $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ si et seulement si il existe un réel strictement positif λ tel que : $z_2 = \lambda z_1$, ou encore si et seulement si : $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = 0 \ (2\pi)$.

II. S'il existe des réels strictement positifs tels que : $z_k = \lambda_k z_1$, alors : $\sum_{k=1}^{n} z_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$ et cette somme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ est elle-même un réel strictement positif. Dans ce cas : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right| . |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k |z_1|\right) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, il s'agit d'un cas d'égalité.

Réciproquement, montrons l'inégalité par récurrence et étudions par la même occasion le cas d'égalité :

L'inégalité $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ a été démontrée pour tout 2-uplet, l'inégalité n'ayant lieu que s'il existe un réel strictement positif λ_2 : $z_2 = \lambda_2 z_1$

Supposons qu'à un rang $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(z_1,...,z_n)$ de complexes tous non nuls : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et que de plus l'égalité $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ n'ait lieu que s'il existe pour $k = 2,...,n$ des réels strictement positifs $\lambda_2,...,\lambda_n$ tels que : $z_k = \lambda_k z_1$.

Alors d'après **I.2**, quel que soit le $(n+1)$ -uplet $(z_1,...,z_n,z_{n+1})$ de complexes tous non nuls : $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{k+1}|$ et d'après **I.3** l'égalité $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{k+1}|$ n'a lieu que s'il existe un réel strictement positif λ tel que : $z_{n+1} = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$

D'après l'hypothèse de récurrence : $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{k+1}| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) + |z_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ ce qui montre l'inégalité pour les $(n+1)$-uplets donc l'hérédité de l'inégalité $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

L'égalité n'a lieu que si $z_{n+1} = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_1\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda\lambda_k\right) z_1$ et $\lambda_{k+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda\lambda_k\right)$ est un réel strictement positif, somme de réels tous strictement positifs.

Ce qui montre l'hérédité de la condition liée au cas d'égalité.

Le cas d'égalité peut s'interpréter par le fait que : $\arg\left(\frac{z_k}{z_1}\right) = 0 \ (2\pi)$ pour tout $k = 2,...,n$.

Partie B.

I. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

II.1. $\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|}\right) z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k z_k}{|z_k|}$.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} = 0$ par conjugaison et d'autre part $\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k z_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Donc $\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. Tous les u_k sont des complexes de module 1. Pour chaque entier k : $|\overline{u}_k (z - z_k)| = |z - z_k|$.

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k (z - z_k)| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k)\right| = \left|-\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

3. L'égalité $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ a lieu si et seulement si l'égalité $\sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k (z - z_k)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k)\right|$ a elle-même lieu.

Si le point M est distinct de tous les points A_k, alors les $z-z_k$ sont tous non nuls, de même que tous les $\bar{u}_k(z-z_k)$. L'égalité a alors lieu d'après **II** si et seulement si il existe pour $k=2,...,n$ des réels strictement positifs λ_k tels que $\bar{u}_k(z-z_k)=\lambda_k\bar{u}_1(z-z_1)$.
Il se peut cependant que M soit confondu avec l'un des A_k. On peut supposer, quitte à modifier l'indexation, que c'est avec A_n. Dans ce cas, les sommations précédentes s'arrêtent à l'indice $n-1$. Dans le cas d'égalité, il existe pour $k=2,...,n-1$ des réels strictement positifs λ_k tels que $\bar{u}_k(z-z_k)=\lambda_k\bar{u}_1(z-z_1)$ et $\bar{u}_n(z-z_n)=0\times\bar{u}_1(z-z_1)$. Les réels λ_k sont alors tous strictement positifs, sauf un qui est nul.

De toute façon : $\sum_{k=1}^{n}\bar{u}_k(z-z_k)=\left(1+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\right)\bar{u}_1(z-z_1)$.

$\bar{u}_1(z-z_1)=-\dfrac{\sum_{k=1}^{n}|z_k|}{\left(1+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\right)}$ est un réel strictement négatif et il en résulte que les autres $\bar{u}_k(z-z_k)=\lambda_k\bar{u}_1(z-z_1)$ sont aussi des réels strictement négatifs (sauf un peut-être).

Réciproquement, si tous ces nombres sont des réels strictement négatifs (sauf peut-être un qui est nul auquel cas M est l'un des points A_k), tous les rapports $\dfrac{\bar{u}_k(z-z_k)}{\bar{u}_1(z-z_1)}=\lambda_k$ sont tous des réels strictement positifs (sauf peut-être un si M est l'un des points A_k), ce qui assure le cas d'égalité.

II.4. Si les $\bar{u}_k(z-z_k)=\dfrac{\bar{z}_k}{|z_k|}z-|z_k|$ sont des réels négatifs, alors les nombres $\dfrac{\bar{z}_k}{|z_k|}z$ sont tous des nombres réels.
Mais puisque aucune droite ne contient tous les points A_k, il n'est pas possible que tous les points A_k soient alignés avec O et que tous les $\dfrac{\bar{z}_k}{|z_k|}$ aient des arguments congrus modulo π (il existe i et j tels que $\arg(z_i)\neq\arg(z_j)\bmod\pi$ et par suite le nombre $\dfrac{\bar{z}_j}{|z_j|}\times\dfrac{|z_i|}{\bar{z}_i}$ n'est pas un réel). Si $z\neq 0$, alors il y a au moins deux nombres $\dfrac{\bar{z}_k}{|z_k|}z$ qui ont des arguments non congrus modulo π et qui ne peuvent être simultanément réels.
Par contraposition, si les nombres $\dfrac{\bar{z}_k}{|z_k|}z$ sont tous des nombres réels, alors $z=0$. La réciproque est évidente.

II.5. Sous les hypothèses de l'énoncé, c'est-à-dire sous réserve qu'il existe effectivement un repère d'origine O distinct de tous les A_k dans lequel les affixes z_k vérifient $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{z_k}{|z_k|}=0$:

Pour tout point M du plan d'affixe z dans ce repère : $\sum_{k=1}^{n}MA_k=\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\geq\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{k=1}^{n}OA_k$ ce qui prouve que $\sum_{k=1}^{n}MA_k$ atteint un minimum lorsque M est en O. La condition nécessaire et suffisante du **II.4** assure l'unicité de ce point.

Le problème de la localisation de O dans le plan revient à obtenir des vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{OA_k}}{\|OA_k\|}$ de somme nulle … Ce n'est pas gagné.

Petite parenthèse pour aller un peu plus loin

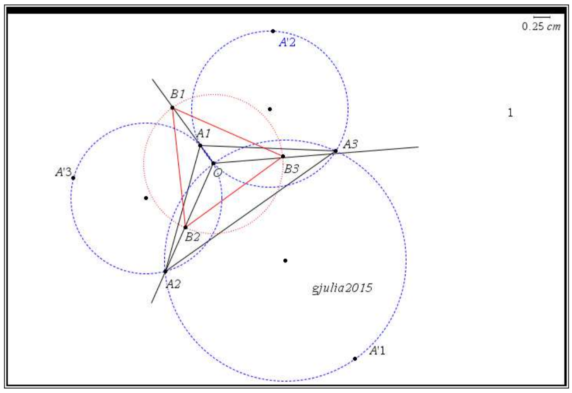
Dans le cas de trois points A_1, A_2, A_3 non alignés et dans l'hypothèse où un tel point existe, on est amené à considérer les points B_k des demi-droites $[OA_k)$ définis par : $\overrightarrow{OB_k} = \dfrac{\overrightarrow{OA_k}}{\|OA_k\|}$ $(k=1,2,3)$. Ils sont tous à la distance 1 du point O. Puisque d'autre part $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}=\vec{0}$, le point O est à la fois le centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle $B_1B_2B_3$. Les seuls triangles dont centre du cercle circonscrit et centre de gravité sont confondus sont les triangles équilatéraux.
Si on suppose $A_1A_2A_3$ triangle direct, $B_1B_2B_3$ est triangle équilatéral direct.

O étant centre d'un tel triangle :

$$\left(\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OB_2}\right)=\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}\right)=\left(\overrightarrow{OB_2},\overrightarrow{OB_3}\right)=\left(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3}\right)=\left(\overrightarrow{OB_3},\overrightarrow{OB_1}\right)=\left(\overrightarrow{OA_3},\overrightarrow{OA_1}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$$

Le point O est sur les trois arcs capables d'où l'on voit (A_1,A_2) ; (A_2,A_3); (A_3,A_1) sous l'angle $\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

Il s'agit des petits arcs des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux indirects $A_1A_2A'_3$, $A_2A_3A'_1$ et $A_3A_1A'_2$ (figure ci-contre).



Réciproquement, si $A_1A_2A_3$ est un triangle direct, les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux indirects $A_1A_2A'_3$, $A_2A_3A'_1$ et $A_3A_1A'_2$ se coupent sur leurs petits arcs à condition toutefois que les trois angles du triangle aient chacun une mesure appartenant à $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$, condition d'existence d'un point O tel qu'on le recherche.

Si cette condition est remplie, O se trouve sur le même demi-plan de frontière $(A_2A'_1)$ que le point A_3 et par cocyclicité sur un même arc du même cercle : $\left(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA'_1}\right)=\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3A_1}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

Donc $\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA'_1}\right)=\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA'_1}\right)=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi\ (2\pi)$. Ce qui explique que O est un point du segment $[A_1A'_1]$. Il est de même sur $[A_2A'_2]$ et sur $[A_3A'_3]$, ces trois segments ont un point commun.

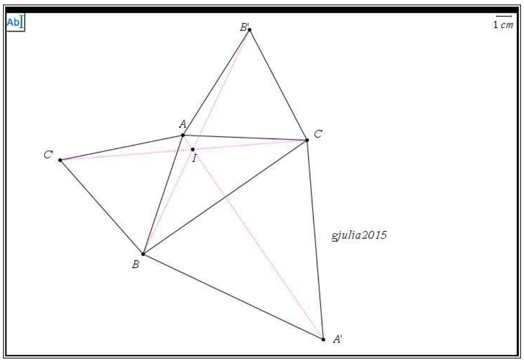
On peut comprendre les hypothèses de la partie C.

(*Fin de la parenthèse*)

Partie C.

Le triangle *ABC* étant direct, et les trois triangles équilatéraux construits extérieurement, les trois triangles *A'CB*, *B'AC* et *C'BA* sont des triangles équilatéraux directs. En conséquence : $\begin{cases} AB' = AC \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$. De même : $\begin{cases} AC' = AB \\ \left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$. La rotation de centre *A* et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme à la fois *C* en *B'* et *C'* en *B*.

Donc : $\begin{cases} CC' = B'B \\ \left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{B'B}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$



Avec les complexes, la rotation de centre *A* et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transformant *C* en *B'* et *C'* en *B* :

Si $u = \mathbf{e}^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\begin{cases} b' = a + u(c-a) = a(1-u) + u\,c \\ b = a + u(c'-a) = a(1-u) + u\,c' \end{cases}$.

Donc : $\dfrac{b'-b}{c-c'} = u$. Mêmes conclusions …

Puisque Ω est un point du segment [*BB'*] : $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{B'B}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ et de même pour les deux autres angles.

Si on désigne par *r*, *s*, *t* les affixes de $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|}, \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\|}, \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\|}$, elles sont toutes de module 1 et compte tenu des mesures des angles obtenues : $s = j\,r$; $t = j\,s = j^2 r$ avec $j = \mathbf{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors : $r + s + t = r\left(1 + j + j^2\right) = 0$, ce qui montre que $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\|} = \vec{0}$. Le point Ω est bien le point *O* qui vérifie les conditions de la partie **B**.