CAPES 2014. Les deux problèmes de géométrie.

1. Epreuve 1, problème 1 : le sujet

Cette épreuve s'intéresse aux applications bijectives du plan qui transforment une droite en une droite. Cette propriété caractérise-t-elle un certain type d'applications du plan ?

Notations

On désigne par $GL_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels. Soit un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O;I;J). Les coordonnées dans ce repère des points de $\mathcal{P}$ sont notées sous forme de matrices colonnes éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$

Définition. Soit *f* une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On dira que *f* vérifie la *condition des droites* si :

1. f est bijective.
2. Pour toute droite D de $\mathcal{P}$, $f(D)$ est aussi une droite de $\mathcal{P}$.

Le but du problème est de trouver toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Partie A : conséquences de la condition des droites et exemples

1. Soit *f* une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites.

1.1. Soient *M* et *N* deux points distincts de $\mathcal{P}$. Montrer que l'image par *f* de la droite (*MN*) est la droite $(f(M)f(N))$.

1.2. Soient *D* et *D'* deux droites distinctes de $\mathcal{P}$. Montrer que $f(D)\cap f(D')=f(D\cap D')$

1.3. Montrer que les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles si et seulement si les droites *D* et *D'* sont parallèles.

1.4. Soient *M*, *N*, *P* trois points distincts de $\mathcal{P}$. Montrer que *M*, *N* et *P* sont alignés si et seulement si $f(M)$, $f(N)$ et $f(P)$ sont alignés.

1.5. Soient *M*, *N*, *P*, *Q* quatre points distincts de $\mathcal{P}$. Montrer que *MNPQ* est un parallélogramme si et seulement si $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme.

2. Soient $A\in GL_2(\mathbf{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On considère l'application $f_{A,B}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $AX+B$

2.1. Montrer que $f_{A,B}$ est bijective et déterminer son application réciproque.

2.2. Soient *M*, *N*, *P* trois points distincts de $\mathcal{P}$. Montrer que *M*, *N* et *P* sont alignés si et seulement si $f_{A,B}(M)$, $f_{A,B}(N)$ et $f_{A,B}(P)$ sont alignés.

2.3. Montrer que $f_{A,B}$ vérifie la condition des droites.

3. Soient *O'*, *I'*, *J'* trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe $A\in GL_2(\mathbf{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ tels que $f_{A,B}(O)=O'$, $f_{A,B}(I)=I'$, $f_{A,B}(J)=J'$.

Partie B. Endomorphisme de l'anneau R

Soit ϕ une application de **R** dans **R** telle que $\phi(1)=1$ et pour tous réels *x* et *y* : $\begin{cases}\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)\\ \phi(xy)=\phi(x)\phi(y)\end{cases}$

1. Montrer que : $\phi(0)=0$ et que pour tous réels x et y : $\phi(x-y)=\phi(x)-\phi(y)$

2. Montrer que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel non nul y : $\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$

3. Montrer que pour tout entier naturel n : $\phi(n)=n$

4. Montrer que pour tout nombre rationnel r : $\phi(r)=r$

5. Soient a et b deux nombres réels, tels que $a\le b$. Montrer que $\phi(a)\le\phi(b)$.On pourra utiliser l'égalité $b-a=\left(\sqrt{b-a}\right)^2$

6. Soit x un nombre réel et soit ε un nombre réel strictement positif.
6.1. Montrer l'existence de deux nombres rationnels x' et x'' tels que $x-\varepsilon\le x'\le x\le x''\le x+\varepsilon$
6.2. En déduire que $x-\varepsilon\le\phi(x)\le x+\varepsilon$
6.3. En déduire que $\phi=Id_{\mathbf{R}}$

Partie C. Un cas particulier

Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites et telle que $f(O)=O$; $f(I)=I$; $f(J)=J$

1. Justifier l'existence de deux applications ϕ et ψ de **R** dans **R**, telles que pour tous nombres réels x et y, les images par f des points de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ sont respectivement $\begin{pmatrix}\phi(x)\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\\psi(y)\end{pmatrix}$

2. Vérifier que $\phi(0)=\psi(0)=0$ et que $\phi(1)=\psi(1)=1$

3.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A ; B ; C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

3.2. En déduire que pour tous nombres réels x et y l'image du point de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix}\phi(x)\\\psi(y)\end{pmatrix}$.

4. Soit x un nombre réel non nul. Soient A et B les points de coordonnées $A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$.
4.1. Montrer que $(f(A)f(B))$ est parallèle à (IJ).
4.2. En déduire que pour tout nombre réel x : $\phi(x)=\psi(x)$.

5. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}x+y\\1\end{pmatrix}$.
5.1. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.
5.2. En déduire que En déduire que pour tous nombres réels x et y : $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$.

6. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$.

6.1. Montrer que les droites (AC) et (IB) sont parallèles.

6.2. Montrer que les droites $\left(f(A)f(C)\right)$ et $\left(I\ f(B)\right)$ sont parallèles.

6.3. En déduire que pour tous nombres réels x et y : $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.

7. Montrer que $f = Id_P$

Partie D. Cas général.

Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites.

1. Montrer que $f(O), f(I), f(J)$ ne sont pas alignés.

2. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ tels que $f_{A,B}(O) = f(O)$; $f_{A,B}(I) = f(I)$; $f_{A,B}(J) = f(J)$

3. Montrer que ${f_{A,B}}^{-1} \circ f = Id_P$

4. Donner toutes les applications vérifiant la condition des droites.

2. Eléments de correction

Partie A.

1. Soit *f* une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites.

1.1. *M* et *N* étant deux points distincts de $\mathcal{P}$, leurs images $f(M)$ et $f(N)$ sont des points distincts puisque *f* est bijective. L'image de (*MN*) est une droite, elle passe par les points distincts $f(M)$ et $f(N)$, il s'agit de la droite $(f(M)f(N))$.

1.2 et 1.3. L'hypothèse importante est *l'injectivité* de *f*.
De façon tout à fait générale, l'inclusion $f(D\cap D')\subset(f(D)\cap f(D'))$ est en effet vérifiée quelle que soit l'application f définie sur un ensemble donné et quelles que soient les parties *D* et *D'* de cet ensemble.

Voyons l'inclusion réciproque. Soit *V* un point de $f(D)\cap f(D')$. Il existe par hypothèse un point *U* de *D* tel que $V=f(U)$ et un point *U'* de *D'* tel que $V=f(U')$. Mais *f* étant supposée bijective, elle est injective et le point V a par f un unique antécédent : $V=f(U)=f(U')\Rightarrow U=U'$. Donc, l'antécédent de V appartient à $D\cap D'$. Tout point de $f(D)\cap f(D')$ a pour antécédent par f un point de $D\cap D'$: $(f(D)\cap f(D'))\subset f(D\cap D')$
Finalement $f(D)\cap f(D')_{gj2015}=f(D\cap D')$ en raison de l'injectivité de *f*.

On sait que l'intersection de deux droites du plan est ou bien une droite, ou bien un unique point, ou bien l'ensemble vide. On sait aussi que dans le plan, une intersection de deux droites égale à l'ensemble vide caractérise le parallélisme strict des susdites droites.
Dès lors, si on considère les deux paires de droites : *D* et *D'* d'une part, $f(D)$ et $f(D')$ d'autre part, de trois choses l'une :

- Ou bien une des deux paires de droites est une paire de droites confondues. L'autre paire aussi.
- Ou bien une des deux paires de droites est une paire de droites sécantes en un unique point. L'autre paire aussi.
- Ou bien une des deux paires de droites est une paire de droites strictement parallèles, l'autre aussi.

Ainsi, *D* et *D'* sont sécantes (respectivement, parallèles) si et seulement si $f(D)$ et $f(D')$ le sont.

1.4. Soient *M*, *N*, *P* trois points distincts de $\mathcal{P}$. Les points *M*, *N* et *P* sont alignés si et seulement si les droites (*MN*) et (*MP*) sont confondues. D'après ce qui précède (**1.1** et la « première des trois choses »), cette condition équivaut au fait que leurs droites images $(f(M)f(N))$ et $(f(M)f(P))$ sont confondues, condition qui équivaut au fait que $f(M)$, $f(N)$ et $f(P)$ sont alignés. (Par contraposition, trois points sont non alignés si et seulement si leurs images par *f* sont trois points non alignés).

1.5. Soient *M*, *N*, *P*, *Q* quatre points distincts de $\mathcal{P}$. *MNPQ* est un parallélogramme (non aplati) si et seulement si les droites (*MN*) et (*QP*) d'une part ainsi que les droites (*NP*) et (*MQ*) d'autre part sont strictement parallèles. D'après ce qui précède (**1.1** et la « troisième des trois choses »), cette condition équivaut au fait que leurs droites images $(f(M)f(N))$ et $(f(Q)f(P))$ d'une part, ainsi que $(f(N)f(P))$ et $(f(M)f(Q))$ d'autre part, sont deux à deux strictement parallèles, condition qui équivaut au fait que $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme (non aplati).

2. Soient $A\in GL_2(\mathbf{R})$ et $B\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On considère l'application $f_{A,B}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $AX+B$.

2.1. Puisque $A \in GL_2(\mathbf{R})$, cette matrice est inversible et son inverse A^{-1} appartient à $GL_2(\mathbf{R})$ tandis que $A^{-1}B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Alors : $Y = AX + B \Leftrightarrow X = A^{-1}Y - A^{-1}B$ ce qui montre à la fois que $f_{A,B}$ est bijective et que son application réciproque est définie par : $X \mapsto A^{-1}X - A^{-1}B$.

2.2. Soient *M*, *N*, *P* trois points distincts de $\mathcal{P}$.

On note $X_{M,N} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$, $X_{M,P} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} X_{M,N} & X_{M,P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_N - x_M & x_P - x_M \\ y_N - y_M & y_P - y_M \end{pmatrix}$ la matrice concaténée.

Alors, $X_{f_{A,B}(M),\, f_{A,B}(N)} = \left(A\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} + B \right) - \left(A\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + B \right) = A\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$ et de même $X_{f_{A,B}(M),\, f_{A,B}(P)} =_{gjulia2015} A\begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix}$ de sorte que la matrice concaténée des deux vecteurs images $V = \begin{pmatrix} X_{f_{A,B}(M),\, f_{A,B}(N)} & X_{f_{A,B}(M),\, f_{A,B}(P)} \end{pmatrix}$ est la matrice $V = AU$ et que : $\det(V) = \det(A) \times \det(U)$, sachant en outre que $\det(A) \neq 0$ puisque *A* est inversible.

M, *N* et *P* sont alignés si et seulement si $\det(U) = 0$, condition qui équivaut à $\det(V) = 0$ ou encore au fait que $f_{A,B}(M)$, $f_{A,B}(N)$ et $f_{A,B}(P)$ sont alignés.

2.3. L'application $f_{A,B}$ est bijective d'après **2.1.**
D'autre part, soit *D* une droite et *M* et *N* deux points distincts de cette droite. Ils déterminent la droite *D* : $D = (MN)$. Les images $f_{A,B}(M)$ et $f_{A,B}(N)$ de *M* et *N* sont des points distincts puisque *f* est injective. Un point *P* appartient à *D* si et seulement si *M*, *N* et *P* sont alignés ce qui équivaut au fait que $f_{A,B}(P)$ est aligné avec $f_{A,B}(M)$ et $f_{A,B}(N)$ c'est-à-dire que $f_{A,B}(P)$ appartient à la droite $(f_{A,B}(M) f_{A,B}(N))$.
L'image de $D = (MN)$ par $f_{A,B}$ est la droite $(f_{A,B}(M) f_{A,B}(N))$. En conséquence, l'image de toute droite de $\mathcal{P}$ est aussi une droite de $\mathcal{P}$. La « condition des droites » est vérifiée par $f_{A,B}$.

3. Un calcul direct démontre à la fois l'existence et l'unicité des matrices *A* et *B* recherchées.
Si on note : $X_{O'} = \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}$, $X_{I'} = \begin{pmatrix} x_{I'} \\ y_{I'} \end{pmatrix}$ et $X_{J'} = \begin{pmatrix} x_{J'} \\ y_{J'} \end{pmatrix}$, on est amené à rechercher $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de sorte que l'on ait en même temps : $AX_O + B = B = X_{O'}$ ainsi que $AX_I + B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + B = X_{I'}$ et que : $AX_J + B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + B = X_{J'}$. Par simple identification, on obtient : $B = \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} x_{I'} - x_{O'} & x_{J'} - x_{O'} \\ y_{I'} - y_{O'} & y_{J'} - y_{O'} \end{pmatrix}$.
De plus, dire que *O'*, *I'*, *J'* sont non alignés revient à dire que $\overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{O'J'}$ sont indépendants, c'est-à-dire que $\det(A) \neq 0$. La matrice *A* est bien dans $GL_2(\mathbf{R})$.

Partie B.
1. $\phi(0) = \phi(0+0) = 2\phi(0)$ donc : $\phi(0) = 0$
Pour tout réel *y* : $0 = \phi(0) = \phi(y - y) = \phi(y) + \phi(-y)$ donc $\phi(-y) = -\phi(y)$.
Par suite pour tous réels *x* et *y* : $\phi(x - y) = \phi(x) + \phi(-y) = \phi(x) - \phi(y)$

2. Pour tout nombre réel non nul *y* : $1 = \phi(1) = \phi\left(y \times \frac{1}{y} \right) = \phi(y) \times \phi\left(\frac{1}{y} \right)$ donc : $\phi\left(\frac{1}{y} \right) = \frac{1}{\phi(y)}$

Par suite pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel non nul y :
$\phi\left(\frac{x}{y}\right) \underset{gj2015}{=} \phi\left(x\times\frac{1}{y}\right) = \phi(x)\times\phi\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}$

3. Par récurrence évidente. Et de plus la relation $\phi(n)=n$ est vérifiée non seulement pour n entier naturel mais aussi pour n entier relatif, ce qui va nous servir dans la question **4**. En effet, si n est un entier relatif négatif : $\phi(n)=\phi(-|n|)=-\phi(|n|)=-|n|=n$

4. Soit $r=\frac{p}{q}$ un rationnel, où p est entier relatif et q entier naturel non nul. $\phi(r)=\phi\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\phi(p)}{\phi(q)}=\frac{p}{q}=r$. La fonction ϕ coïncide avec l'identité sur l'ensemble des rationnels.

5. $\phi(b)-\phi(a)=\phi(b-a)=\phi\left(\left(\sqrt{b-a}\right)^2\right)=\left(\phi\left(\sqrt{b-a}\right)\right)^2 \geq 0$**.** La fonction ϕ est une fonction croissante.

6. On considère jusqu'à **6.3** inclus un réel x donné.

6.1. Soit un réel strictement positif ε. Soit q un entier tel que : $q>\frac{1}{\varepsilon}$ et soit $p=[qx]$ (la partie entière). Alors : $p\leq qx<p+1$ et par suite : $\frac{p}{q}\leq x<\frac{p+1}{q}$. Les nombres $x'=\frac{p}{q}$ et $x''=\frac{p+1}{q}$ sont deux rationnels et d'un côté : $0\leq x-x'<\frac{1}{q}<\varepsilon$ donc $x-\varepsilon<x'\leq x$ tandis que de l'autre : $0<x''-x\leq\frac{1}{q}<\varepsilon$ donc $x<x''<x+\varepsilon$.
On a obtenu deux rationnels qui vérifient un petit peu plus que les inégalités demandées.

6.2. Puisque la fonction ϕ est une fonction croissante : $\phi(x')\leq\phi(x)\leq\phi(x'')$ et puisqu'elle coïncide avec l'identité sur l'ensemble des rationnels : $x'\leq\phi(x)\leq x''$. Ce qui implique : $x-\varepsilon\leq\phi(x)\leq x+\varepsilon$ et ceci indépendamment du choix de ε, aussi petit soit-il.

6.3. Nécessairement : $\phi(x)=x$ pour ce réel donné x, quel qu'il soit. Si en effet il y avait un écart, dans un sens ou dans l'autre, on pourrait trouver un réel ε (par exemple : $_{gj2015}\ \varepsilon=\frac{|\phi(x)-x|}{2}$) tel que : $\phi(x)\notin[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ en contradiction avec l'inégalité $x-\varepsilon\leq\phi(x)\leq x+\varepsilon$ obtenue indépendamment du choix de ε.
Ce qui établit que $\phi=Id_R$

Partie C. un cas particulier.

Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites et telle que $f(O)=O$; $f(I)=I$; $f(J)=J$

1. D'après **A.1.1**, les droites (OI) et (OJ), d'équations cartésiennes respectives $y=0$ et $x=0$ sont globalement invariantes. Pour tout M de (OI) [respectivement de (OJ)] de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ [respectivement $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$] , son image M' appartient aussi à (OI) [respectivement à (OJ)]. Il existe un réel x' [respectivement y'] tel que M' ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\0\end{pmatrix}$ [respectivement $\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$]. Il existe ainsi deux applications ϕ et ψ de **R**

dans **R** définies respectivement par : $x \mapsto \phi(x) = x'$ et $y \mapsto \psi(y) = y'$ telles que pour tous nombres réels *x* et *y*, les images par *f* des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(y) \end{pmatrix}$

2. $\phi(0) = \psi(0) = 0$ et $\phi(1) = \psi(1) = 1$ car les points $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des points invariants par *f*.

3.1. Soient *x* et *y* deux nombres réels non nuls. Soient *A* ; *B* ; *C* les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Alors : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, il s'agit du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque *x* et *y* sont non nuls, ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Le quadrilatère *OACB* est un parallélogramme non aplati. D'après **A.1.5** $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est aussi un parallélogramme non aplati. Il s'ensuit que : $\overrightarrow{f(O)f(A)}\begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix} =_{gjulia2015} \overrightarrow{f(B)f(C)}\begin{pmatrix} x_{f(C)} \\ y_{f(C)} - \psi(y) \end{pmatrix}$

3.2. L'image du point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.

Lorsque $x = 0$ ou bien lorsque $y = 0$, le résultat vient de la définition même des deux fonctions ϕ et ψ.
Lorsque *x* et *y* sont tous deux non nuls, le résultat vient de l'égalité vectorielle précédente : $x_{f(C)} = \phi(x)$ et $y_{f(C)} - \psi(y) = 0$.

4. Soit *x* un nombre réel non nul. Soient *A* et *B* les points de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

4.1. Puisque *x* est non nul, *A* et *B* sont des points distincts et le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ est directeur de la droite (*AB*). Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$, donc (*AB*) et (*IJ*) sont parallèles (strictement si $x \neq 1$ et confondues si $x = 1$). D'après **A.1.3**, les images de ces droites parallèles sont des droites parallèles : $(f(A)f(B))$ est parallèle à (*IJ*).

4.2. On a vu d'abord que : $\phi(0) = \psi(0)$.

Si *x* est non nul, ce qui précède montre que le vecteur $\overrightarrow{f(A)f(B)}\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et a donc des coordonnées égales.
Pour tout nombre réel *x* : $\phi(x) = \psi(x)$.

5. Soient *x* et *y* deux nombres réels non nuls. Soient *A, B, C* les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.1. Alors : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, il s'agit du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque x est non nul, ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$. Le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme non aplati. D'après **A.1.5** $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est aussi un parallélogramme non aplati. Il s'ensuit que : $\overrightarrow{f(O)f(A)}=\overrightarrow{f(B)f(C)}$.

5.2. Pour tous nombres réels x et y : $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$. Cette relation est triviale si l'un des réels x ou y est nul. S'ils sont tous deux non nuls, la question **5.1** prouve que : $\begin{cases} x_{f(C)}-x_{f(B)}=x_{f(A)}-x_{f(O)} \\ y_{f(C)}-y_{f(B)}=y_{f(A)}-y_{f(O)} \end{cases}$ donc que $\phi(x+y)-\phi(y)=\phi(x)$ puisque $f(C)$ a pour abscisse $\phi(x+y)$ tandis que $f(A)$ et $f(B)$ ont pour abscisses respectives $\phi(x)$ et $\phi(y)$ et que O est invariant.

6. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$.

6.1. et 6.2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{IB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

Ainsi : $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{IB}$. Ces deux vecteurs sont non nuls et dirigent respectivement (AC) et (IB). Ils sont colinéaires, les droites (AC) et (IB) sont parallèles. D'après **A.1.3** leurs droites images $(f(A)f(C))$ et $(I\ f(B))$ le sont aussi.

6.3. Pour tous nombres réels x et y : $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$. La relation est triviale si l'un ou l'autre des réels x ou y est nul, et s'ils sont tous deux non nuls, le parallélisme des droites $(f(A)f(C))$ et $(I\ f(B))$ montre que $\det\left(\overrightarrow{f(A)f(C)},\overrightarrow{I\ f(B)}\right)_{gj2015}=\begin{vmatrix} -\phi(x) & -1 \\ \psi(xy) & \psi(y) \end{vmatrix}=0$ donc que $\psi(xy)-\phi(x)\psi(y)=0$. Vu d'après **4.2** que fonctionnellement $\phi=\psi$, on obtient le résultat.

7. La fonction ϕ vérifie les hypothèses de la partie **B**. Il s'agit de l'application identique de **R** dans **R**. Donc, $f=Id_P$ puisque chaque point du plan a pour image le point de mêmes coordonnées.

Partie D. Cas général.

Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant la condition des droites.

1. D'après **A.1.4** (contraposée) puisque O, I, J ne sont pas alignés, leurs images $f(O), f(I), f(J)$ ne le sont pas non plus.

2. D'après **A.3**, $f(O), f(I), f(J)$ n'étant pas alignés, il existe $A\in GL_2(\mathbf{R})$ et $B\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ tels que : $f_{A,B}(O)=f(O)_{gjulia2015}$; $f_{A,B}(I)=f(I)$; $f_{A,B}(J)=f(J)$.

3. L'ensemble des applications qui vérifient la condition des droites est clairement un groupe pour la loi de composition (dès lors qu'il s'agit d'un ensemble de bijections qui « conservent » quelque chose …). Ainsi, ${f_{A,B}}^{-1}$ vérifie la condition des droites de même que la composée ${f_{A,B}}^{-1}\circ f$. Mais cette dernière laisse invariant chacun des points O, I, J. Il s'agit de l'application du « cas particulier » de la partie **C**. Donc de l'identité du plan. Il s'ensuit que $f = f_{A,B}$, c'est-à-dire que f est entièrement déterminée par la donnée des images des trois points O, I, J.

4. On aura reconnu dans $f_{A,B}$ une application affine bijective du plan. Réciproquement, toute application affine bijective du plan est une application $f_{A,B}$ déterminée par les images des points O, I, J. L'ensemble des applications du plan qui vérifient la condition des droites est l'ensemble des transformations affines du plan.

3. Epreuve 2, problème 3

Ce problème étudie les triangles dont certaines des droites remarquables (médiatrices, hauteurs ou médianes) sont perpendiculaires.

1. Triangles *ABC* dont les médiatrices de [*AB*] et de [*AC*] sont perpendiculaires et triangles *ABC* dont les hauteurs issues de *B* et de *C* sont perpendiculaires.

Il est possible de raisonner en termes d'angles de droites. On note Δ_{AB} et Δ_{AC} les médiatrices des côtés [*AB*] et [*AC*]. Les médiatrices des côtés [*AB*] et [*AC*] d'une part, et les côtés (*AB*) et (*AC*) d'autre part forment deux angles de droites à côtés deux à deux perpendiculaires :

$(\Delta_{AB},\Delta_{AC})=(\Delta_{AB},AB)+(AB,AC)+(AC,\Delta_{AC})\ (\pi)$ par la relation de Chasles

$(\Delta_{AB},AB)=(AC,\Delta_{AC})=\dfrac{\pi}{2}\,(\pi)$

Donc : $(\Delta_{AB},\Delta_{AC})=(AB,AC)\ (\pi)$

Ainsi, les médiatrices des côtés [*AB*] et [*AC*] sont perpendiculaires si et seulement si les côtés (*AB*) et (*AC*) du triangle sont perpendiculaires, c'est-à-dire si et seulement si *ABC* est un triangle rectangle en *A*.

Quant à la hauteur issue de *B*, elle est parallèle à Δ_{AC} car ces deux droites sont l'une et l'autre perpendiculaires à une même troisième droite, (*AC*). De même, la hauteur issue de *C* est parallèle à Δ_{AB}. Les hauteurs issues de *B* et de *C* sont perpendiculaires si et seulement si Δ_{AB} et Δ_{AC} sont perpendiculaires ce qui ramène au point précédent.

2. Il n'existe pas de triangle dont deux bissectrices sont perpendiculaires

On considère une bissectrice Δ (intérieure ou extérieure) de l'angle de sommet *B* et une bissectrice Δ' (intérieure ou extérieure) de l'angle de sommet *C*. La droite (*AB*) a pour image (*BC*) par la symétrie axiale d'axe Δ, et (*BC*) a pour image (*AC*) par la symétrie axiale d'axe Δ'. Donc (*AB*) a pour image (*AC*) par la composée des deux symétries axiales $r=s_{\Delta'}\circ s_{\Delta}$. Cette composée est une rotation (et non une translation puisque (*AB*) et (*AC*) sont sécantes) d'angle $2(\Delta,\Delta')$.

Puisque *ABC* n'est pas aplati : $(AB,AC)=2(\Delta,\Delta')\neq 0\ (\pi)$ et par conséquent : $(\Delta,\Delta')\neq 0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. En particulier, ces bissectrices ne peuvent pas être perpendiculaires.

(Cette méthode de résolution prouve ainsi un peu plus que demandé : aucune bissectrice, intérieure ou extérieure, de l'angle de sommet *B* ne peut être perpendiculaire à une bissectrice, intérieure ou extérieure, de l'angle de sommet *C*).

3. Triangles ayant deux médianes perpendiculaires

Soit *I* le milieu de [*BC*].

Pour tout point *M* du plan : $MB^2+MC^2=2MI^2+\dfrac{BC^2}{2}=2MI^2+\dfrac{a^2}{2}$ (théorème de la médiane).

Si on considère le point *A* : $c^2+b^2=AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{a^2}{2}=18GI^2+\dfrac{a^2}{2}$ (car $AI=3GI$), ce qui donne :

$GI^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{36}$

Si les médianes issues de *B* et de *C* sont perpendiculaires, le triangle *GBC* est rectangle en *G* et *G* appartient au cercle de diamètre [*BC*] : $GI=\dfrac{a}{2}$

a, *b*, *c* sont liés par la relation : $\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{36}$ c'est-à-dire par la relation : $b^2+c^2=5a^2$

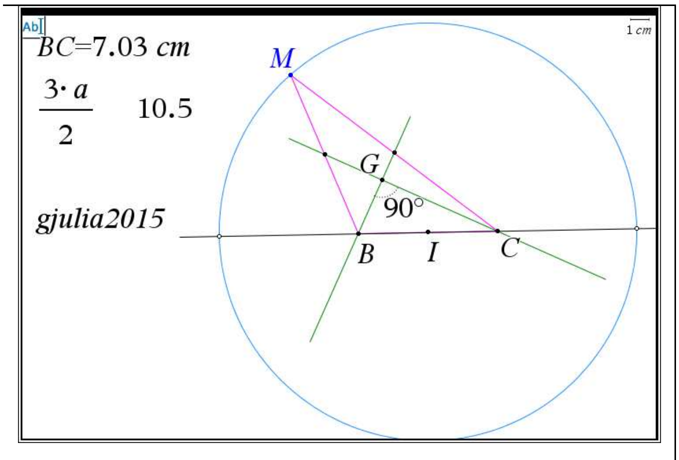
Réciproquement, soit *ABC* est un triangle non aplati dont les mesures des côtés vérifient cette relation :

Le point G n'appartient pas à (BC) puisque G est strictement entre I et A. GBC est aussi un triangle non aplati.

$GI^2 = \dfrac{2\times\left(5a^2\right)-a^2}{36} = \dfrac{9a^2}{36} = \dfrac{a^2}{4}$ et : $GI = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2}$. Le triangle GBC est un triangle rectangle en G.
Les droites (GB) et (GC) sont perpendiculaires.

Soit B et C sont deux points distincts du plan tels que $BC = a$ et soit I le milieu de $[BC]$.
Soit M un point du plan, n'appartenant pas à (BC).
Les médianes issues de B et de C du triangle MBC sont perpendiculaires si et seulement si : $MB^2 + MC^2 = 5a^2$, c'est-à-dire si et seulement si : $2MI^2 + \dfrac{a^2}{2} = 5a^2$ ou encore si et seulement si : $MI^2 = \dfrac{9a^2}{4}$.

L'ensemble des points M tels que les médianes issues de B et de C du triangle MBC sont perpendiculaires est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{3a}{2}$ privé de ses intersections avec (BC).



4. Construction du projeté *A'* du sommet *A* sur la grande diagonale [*BH*] du cube *ABCDEFGH*

Soit a la longueur d'une arête du cube.
Dans le cube, le triangle ABH (entre autres triangles) a la propriété du **4.3** car : $BH = a\sqrt{3}$ et $AH = a\sqrt{2}$, ce qui fait que : $BH^2 + AH^2 = 5AB^2$ mais honnêtement je ne vois pas en quoi cela aide pour la construction de A'. Procédons autrement …

- $AF = FC = CA = a\sqrt{2}$: le triangle AFC est un triangle équilatéral.
- $BA = BC = BF = a$ et $HA = HC = HF = a\sqrt{2}$: les points B et H sont tous deux équidistants des trois sommets du triangle ABC. Ils appartiennent à son axe médiateur[1], qu'ils déterminent.
- (BH), en tant qu'axe médiateur du triangle ABC, est la droite orthogonale au plan (ABC) passant par le centre A' du cercle circonscrit à ce triangle. Tout point de (ABC), et en particulier A, se projette orthogonalement en A' sur (BH).
- ABC étant équilatéral, le point A' est en même temps le centre de gravité du triangle.

Une construction de A' à la règle seule en découle : Le point d'intersection I des diagonales (BD) et (AC) du carré $ABCD$ est le milieu de $[BC]$. La droite (FI) est une médiane du triangle ABC. Incluse dans le plan (BFH), elle est sécante avec (BH) en A'.

[1] Dans l'espace, l'axe médiateur d'un triangle non aplati est l'ensemble des points équidistants des trois sommets. C'est la droite d'intersection des plans médiateurs des côtés de ce triangle. La droite d'intersection des plans médiateurs de deux des côtés est en effet incluse dans le plan médiateur du troisième côté.

Le logiciel permet une vérification de la construction en utilisant une autre propriété du point *A'*.

Si l'espace est rapporté au repère $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right)$, les points *A*, *C*, *F*, *H* ont pour coordonnées respectives $A(0,1,0)$; $C(0,1,0)$; $F(0,0,1)$; $H(1,1,1)$. Le plan (*ABC*) est le plan d'équation $x+y+z=1$ tandis que la droite (*BH*) a pour équations paramétriques : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda, \lambda \in \mathbf{R} \\ z=\lambda \end{cases}$. Le point d'intersection *A'* de (*BH*) avec (*ABC*) est le point $A'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ de sorte que : $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{BA'}$, relation qu'atteste le logiciel.