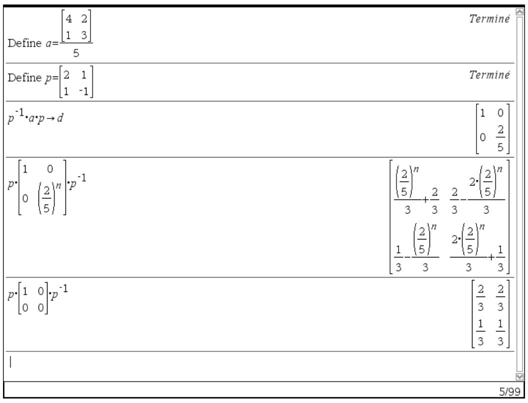
Epreuve 2. Problème 1 : puissances de matrices

Vous trouverez l'énoncé complet sur le site du CAPES : http://capes-math.org/data/uploads/EP2_2013.pdf

Voici un canevas de résolution plus ou moins détaillé selon les questions, à consulter seulement après avoir travaillé le problème.

A moins que quelque chose m'ait échappé, je trouve que les questions les plus délicates sont « conditions suffisantes 4.2 et 5.1 ». Il vous reste à construire une solution « aboutie ».

1. Etude d'un exemple



L'écran ci-contre résume les principaux résultats de cette partie.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(n)\, x_0 + a_{1,2}(n)\, y_0 \\ a_{2,1}(n)\, x_0 + a_{2,2}(n)\, y_0 \end{pmatrix}.$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont des sommes de suites convergentes, elles convergent vers les sommes des limites, respectivement $\frac{2}{3}(x_0 + y_0)$ et $\frac{1}{3}(x_0 + y_0)$

2. Résultats préliminaires

1. Ne pas perdre de vue que l'ensemble des suites complexes convergentes a une structure d'espace vectoriel sur **C**.

2. Dans **2.1** et **2.2** la multiplication ne se fait pas du même côté. Dans **2.1** : $(A_n\ X) = \left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{i\,k}(n) x_{k\,j} \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$.

Dans **2.2** il faut supposer que (A_n) est une suite convergente de matrices de $M_q(\mathbf{C})$ et l'on a $(X\ A_n) = \left(\sum_{k=1}^{k=q} x_{i\,k}(n) a_{k\,j} \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$

3. On peut fixer un entier u tel que $1 \le u \le n$ et noter R_u la matrice de $M_p(\mathbf{C})$ dont la u-ème ligne est composée de « 1 », toutes les autres lignes étant nulles (*mais il y a peut-être mieux comme choix de R* …).

Alors : $(A_n\ R_u) = \left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{i\,k}(n) r_{k\,j} \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}} = \left(a_{i\,u}(n) \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}}$**.** Cette suite de matrices doit par hypothèse converger vers zéro.

3. Condition nécessaire

2. Soit y un vecteur qui est dans l'intersection considérée. Il s'agit d'un vecteur invariant : $u(y) - y = 0$ et en même temps il existe x : $y = u(x) - x$.

Conjecturer (en calculant pour n=1, 2, 3 et 4 par exemple) une relation exprimant $u^n(x)$ en fonction de n de x et de $u(x)$ puis la démontrer. Prouver en utilisant l'hypothèse de limite nulle que nécessairement $u(x) - x = 0$

4. Condition suffisante

1, 2 et 3. Tout polynôme à coefficients complexes non constant admet au moins une racine dans **C**. Il en résulte que tout polynôme non constant à coefficients complexes est scindé sur **C**. Pour tout endomorphisme u de $\mathbf{C}^n$, il en est ainsi du polynôme caractéristique, et le fait d'avoir un polynôme caractéristique scindé est une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation.

4.2. Soit i tel que $2 \le i \le n$. Supposons que les suites $\left(u^n\left(e_j\right)\right)$ convergent vers zéro pour les rangs 1, 2, $i-1$. Sous cette hypothèse, pour tout ε > 0, il existe un entier m_1 tel que : $k \ge m_1 \Rightarrow \left|u^k\left(e_j\right)\right| \le \varepsilon$ pour tous les j (il existe un entier m pour chaque j, il suffit de choisir le plus grand de tous).

L'image par u de e_i peut s'écrire : $u(e_i) = \alpha_i\, e_i + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji}\, e_j\right) = \alpha_i\, e_i + x$ en désignant par x le vecteur :

$$x = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji}\, e_j \; .$$

Etablir que $u^n(e_i) = \alpha_i{}^n e_i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_i{}^{n-k} u^{k-1}(x)$ en convenant que u^0 représente l'identité.

Fixer m_1.

Considérer un entier n strictement supérieur à m_1 et majorer $\left|u^n\left(e_i\right)\right|$ en « coupant en deux » au niveau du rang m_1 la somme précédente. (On obtient donc une somme de 3 termes qui pour des raisons diverses à préciser pourront être rendus « aussi petits que l'on veut »)

Montrer qu'au final, $\left|u^n\left(e_i\right)\right|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant d'abord ε « suffisamment petit », puis m_1 subordonné au choix de ε, puis n assez grands.

5.1. Le point clef de cette question est de montrer que l'image de $u - Id$ est stable par u.
Soit z appartenant à l'image de $u - Id$. Il existe y : $z = u(y) - y$.
Compte tenu de la supplémentarité des deux sous-espaces noyau et image, on peut supposer que y appartient à l'image de $u - Id$ (car il peut de toute façon se décomposer en une somme : $y = y_1 + y_2$ avec y_2 appartenant à l'image de $u - Id$ et y_1 vecteur invariant qui ne change rien à l'expression de $u(y) - y$).

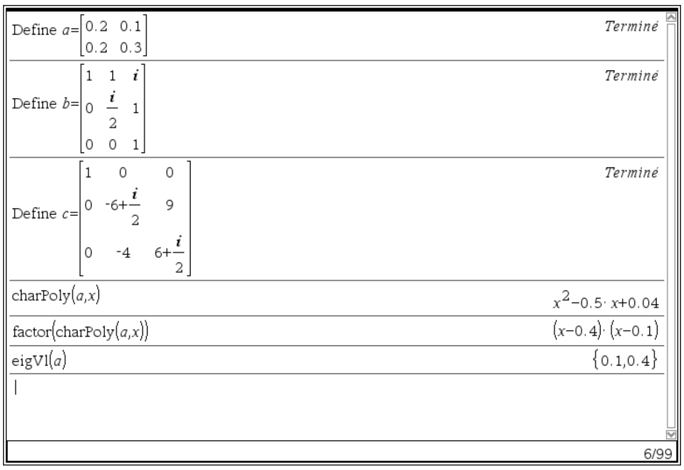
Il existe donc x : $y = u(x) - x$ et z s'exprime en fonction de x : $z = u^2(x) - 2u(x) + x$

Calculer $u(z)$ et établir qu'il est l'image par $u - Id$ d'un vecteur à préciser.

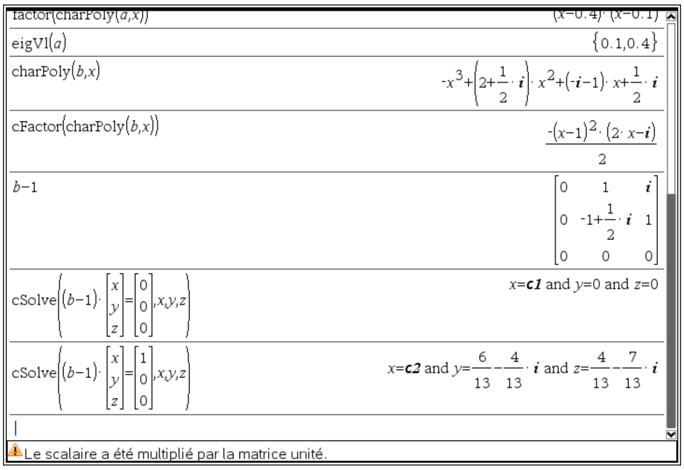
5. Applications

Les matrices de **2.1**, **2.2** et **2.3** sont stockées en variables a, b et c respectivement.

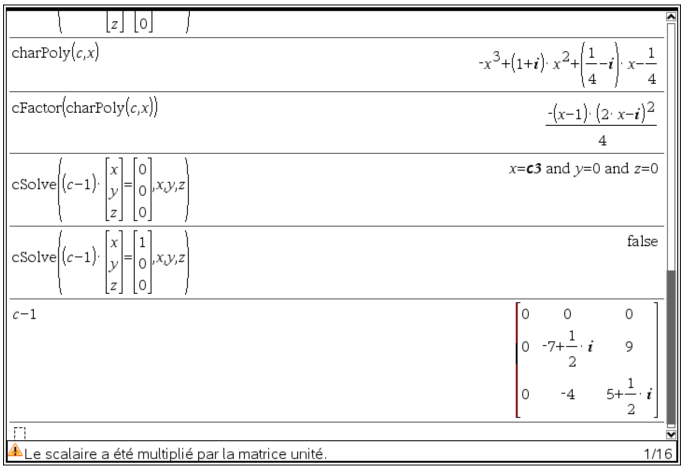
La matrice de **2.1** admet deux valeurs propres distinctes qui sont 0,1 et 0,4, toutes deux de module strictement inferieur à 1. La suite (A^n) converge vers la matrice nulle.



Celle de **2.2** admet comme valeurs propres 1 avec l'ordre de multiplicité 2 et $\frac{i}{2}$. Mais le noyau et l'image de $u-Id$ ont une intersection non réduite au zéro. Le noyau est la droite vectorielle de base $(1,0,0)$ et l'image est le plan d'équation $z=0$, plan qui contient la droite vectorielle de base $(1,0,0)$. La suite (A^n) n'est pas convergente.



Celle de **2.3** admet comme valeurs propres 1 et $\frac{i}{2}$ avec l'ordre de multiplicité 2. Le noyau est la droite vectorielle de base $(1,0,0)$ et l'image est le plan d'équation $x=0$. Leur intersection est réduite au zéro. La suite (A^n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Un calcul approché de puissances élevées (200 par exemple) de ces matrices laisserait conjecturer d'ailleurs une convergence probable des matrices **2.1** et **2.3** et une divergence de celle de **2.2.**