Epreuve 1. Problème 1 : nombres irrationnels Indications

Vous trouverez l'énoncé complet sur le site du CAPES : http://capes-math.org/data/uploads/EP1_2013.pdf

1. Exemple de nombres irrationnels

1. Montrer que $\sqrt{n}$ rationnel implique $\sqrt{n}$ entier naturel puis contraposer.

2. Un nombre premier n'a pas de diviseur strict, ce n'est donc pas un carré…

3. Supposer $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ rationnel. Il existerait deux entiers naturels p et q premiers entre eux, tels que : $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$ donc tels que : $2^q = 3^p$ …

2. Preuve de l'irrationalité de π

1. 1. $P'_n(x) = (a - 2b\,x)P_{n-1}(x)$

1.2. Par récurrence. Au rang 1 : $P'_1(x) = (a - 2b\,x)P_0(x) = a - 2b\,x$. Cette dérivée est > 0 pour $0 < x < \dfrac{a}{2b} = \dfrac{\pi}{2}$ et < 0 pour $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{2b} < x < \dfrac{a}{b} = \pi$. La fonction P_1 s'annule en zéro et en π, est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$. Elle admet un maximum en $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{2b}$.

Supposer que P_{n-1} a ces propriétés et montrer qu'alors la fonction P_n les a aussi.

On obtient $\sup\limits_{[0\ ;\ \pi]} |P_n(x)| = P_n\left(\dfrac{a}{2b}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$

1.4. Même question que dans un autre sujet posé en 2013. Consulter un bon manuel d'analyse.

1.5. Le quotient de deux termes consécutifs de cette suite est : $\dfrac{P_n\left(\dfrac{a}{2b}\right)}{P_{n-1}\left(\dfrac{a}{2b}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)}{n}$. Pour n assez grand, il peut être rendu plus petit qu'un nombre strictement plus petit que 1 de votre choix (que 1/2 par exemple).

La suite (I_n) est minorée par la suite nulle et majorée par une suite convergeant vers zéro.

2.1. Pour $0 \le k \le n-1$, P_n se présentant sous forme de produit, on peut considérer la formule de dérivation d'un produit de Leibniz $f^{(k)} = \sum_{j=0}^{j=k} \binom{k}{j} u^{(j)} v^{(k-j)}$ avec $u = x^n$ et $v = (a-bx)^n$. On peut écrire : $u^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}$ et $v^{(k-j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k+j)!}(-b)^{k-j}(a-bx)^{n-k+j}$ pour des ordres de dérivation convenables.

Trouver des raisons pour lesquelles $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 0$

2.2. Pour $n \le k \le 2n$, la formule de Leibniz peut être reconduite à condition de convenir que lorsque l'ordre de dérivation d'un terme du produit dépasse n, la dérivée correspondante est nulle.
En zéro, il y a un seul terme de la somme qui ne s'annule pas, celui où on a dérivé n fois exactement la fonction u (c'est-à-dire celui tel que $j = n$) : $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(2n-k)!(k-n)!} a^{2n-k}(-b)^{k-n}$

Trouver des raisons pour lesquelles $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif.

En $\dfrac{a}{b}$, il y a un seul terme de la somme qui ne s'annule pas, celui où on a dérivé n fois exactement la fonction v (c'est-à-dire celui tel que $k - j = n$). Faire pareil.

2.3. P_n est un polynôme de degré $2n$. Que dire de ses dérivées d'ordre $\ge 2n+1$?

3.1. On ne perd pas de vue que P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières relatives aussi bien en zéro qu'en $\dfrac{a}{b} = \pi$.

Par une première i.p.p. : $I_n = \int_0^{a/b} P_n(x)\sin x\, dx = [-P_n(x)\cos x]_0^{a/b} + \int_0^{a/b} P_n'(x)\cos x\, dx$.
Le crochet est un nombre entier d'après la question précédente. Reste à s'occuper de l'intégrale restante :

$\int_0^{a/b} P_n'(x)\cos x\, dx = [P_n'(x)\sin x]_0^{a/b} - \int_0^{a/b} P_n^{(2)}(x)\sin x\, dx$. Le crochet est nul puisque le sinus prend la valeur zéro aussi bien en zéro qu'en $\dfrac{a}{b} = \pi$. Reste à s'occuper de l'intégrale restante, qui met en jeu la dérivée seconde.

On va continuer à i.p.p. comme ça, en obtenant un coup un crochet nul, un coup un crochet entier relatif, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus à « s'occuper de l'intégrale restante » (quand ?).

3.2. En supposant que π est rationnel, on a donc démontré d'une part que I_n est une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers zéro et d'autre part que tous les I_n sont des nombres entiers…

3. Développement en série de Engel

1. La série de termes positifs (S_n) est majorée terme à terme par la série géométrique de premier terme $\dfrac{1}{a_0}$ et de raison $\dfrac{1}{a_0}$.

2.1 à 2.3. La suite (x_n) est définie par la formule de récurrence : $x_{n+1} = \left(1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)x_n - 1 = x_n + x_n\, E\left(\frac{1}{x_n}\right) - 1$

Le premier terme de cette suite est par hypothèse un nombre réel strictement positif.

Montrer par récurrence que x_n est un réel strictement positif.

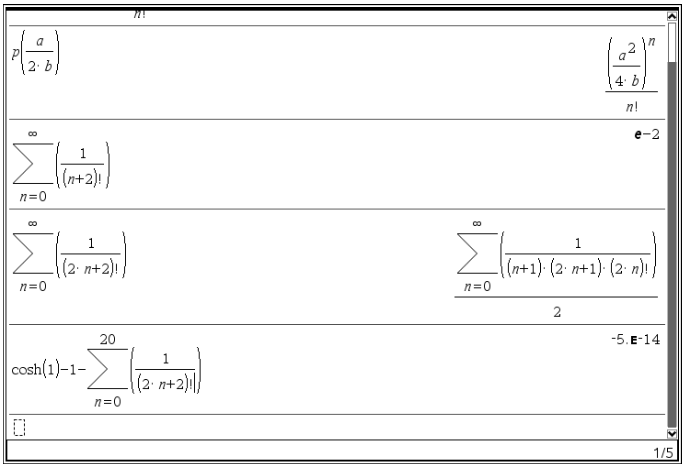
Au passage, on peut noter que puisque $x_1 = a_0 x_0 - 1$ et que : $x = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0}[a_1, a_2, ...]$, le nombre x_1 admet lui-même un développement en série de Engel qui est : $x_1 = [a_1, a_2, ...]$. Cela peut servir plus tard.

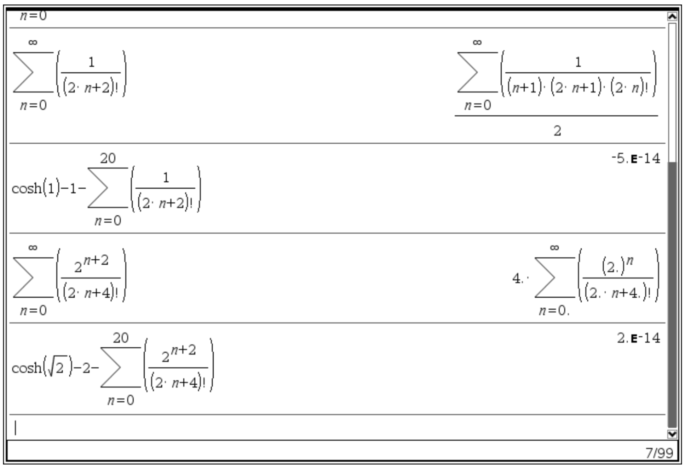
2.4. Vérifier que la suite : $\left(S_{n-1} + \frac{x_n}{a_0 ... a_{n-1}}\right)$ est une suite constante.

3.1. De manière générale : $S_n = S_{n_0 - 1} + \frac{1}{a_0 ... a_{n_0 - 1}}\left(\frac{1}{a_{n_0}} + ... + \frac{1}{a_{n_0} ... a_n}\right)$. En passant à la limite : $[a_0, ...] = S_{n_0 - 1} + \frac{1}{a_0 ... a_{n_0 - 1}}[a_{n_0}, ...]$. Si une autre suite de Engel coïncide avec celle-ci pour ses n_0 premiers termes $b_0 = a_0$ ...; $b_{n_0 - 1} = a_{n_0 - 1}$, on a aussi : $[b_0, ...] = S_{n_0 - 1} + \frac{1}{a_0 ... a_{n_0 - 1}}[b_{n_0}, ...]$.

3.2. Montrer que a_0 est l'unique entier se trouvant dans l'intervalle $\left]\frac{1}{x} ; \frac{1}{x} + 1\right]$. Quant à lui, $E\left(\frac{1}{x}\right)$ est par définition de la partie entière l'unique entier se trouvant dans l'intervalle $\left]\frac{1}{x} - 1 ; \frac{1}{x}\right]$.

Le logiciel nSpire trouve **4.2** mais non pas **4.3**. Cependant, la comparaison de la limite présumée avec un terme de rang élevé est très encourageante.





5.

$$\cosh\left(\sqrt{2}\right)-2=\frac{2^2}{4!}+\frac{2^3}{6!}+\frac{2^4}{8!}+...=\sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+2}}{(2n+4)!}$$

6. Le sens réciproque ne pose pas de gros problèmes.

Sens direct : Supposons que : $x=\dfrac{p_0}{q}$ (avec p_0 et q non nécessairement premiers entre eux, de toute façon cette propriété va se perdre après itération).

Soit : $q=p_0\,u_0+r_0$ la division euclidienne du dénominateur par le numérateur, avec $0\leq r_0<p_0$.

Ou bien $r_0=0$, auquel cas x est l'inverse d'un entier $x=\dfrac{1}{u_0}=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(u_0+1)^{n+1}}$, la suite associée est une suite constante.

Ou bien $r_0>0$, auquel cas, $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=E\left(\dfrac{q}{p_0}\right)=u_0=\dfrac{q-r_0}{p}$. Le nombre a_0 est : $a_0=1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{p+q-r_0}{p}$

et le nombre x_1 est : $x_1=[a_1,a_2,...]=a_0\dfrac{p_0}{q}-1=\dfrac{p_0-r_0}{q}$.

On itère le raisonnement. Montrer qu'à un moment donné, on arrivera au cas d'un reste nul.

Exemple : $x=\dfrac{61}{200}$. Successivement : $200=3\times 61+17$, $a_0=4$; $x_1=\dfrac{44}{200}=\dfrac{11}{50}$ puis $50=4\times 11+6$,

$a_0=5$; $x_2=\dfrac{5}{50}=\dfrac{1}{10}$ qui est l'inverse d'un entier et finalement : $\dfrac{61}{200}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\dfrac{1}{4\times 5}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{11}\right)^n$