Epreuve 1. Problème 1 : nombres irrationnels

Vous trouverez l'énoncé complet sur le site du CAPES : http://capes-math.org/data/uploads/EP1_2013.pdf

1. Exemple de nombres irrationnels

1. Supposons $\sqrt{n}$ rationnel. Il existe deux entiers naturels p et q premiers entre eux tels que : $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ et dans ce cas : $p^2 = n\,q^2$. Or, si p et q sont premiers entre eux, les entiers p^2 et q^2 le sont aussi[1]… D'après le théorème de Gauss, p^2 divise n : il existe un entier naturel u tel que : $n = p^2 u$.
Ou bien $n = u = 0$ auquel cas n est entier, de même que sa racine carrée, ou bien les entiers u et q vérifient la relation : $1 = u\,q^2$ qui n'est réalisée que si $1 = u = q^2$, ce qui implique que $q = 1$ et $p^2 = n$. L'entier n est un carré. Ainsi, $\sqrt{n}$ rationnel implique $\sqrt{n}$ entier naturel. Par contraposition, $\sqrt{n}$ non entier naturel implique $\sqrt{n}$ irrationnel.

2. Un nombre premier n'a pas de diviseur strict, ce n'est donc pas un carré. Sa racine n'est pas un entier donc est irrationnelle.

3. Supposons $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ rationnel. Il existerait deux entiers naturels p et q premiers entre eux, tels que : $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ donc tels que : $2^q = 3^p$. Les entiers2 et 3 étant premiers entre eux, cette égalité ne pourrait avoir lieu que si les exposants sont nuls, ce qui contredirait l'hypothèse « p et q premiers entre eux ».

4. Question classique

2. Preuve de l'irrationalité de π

1. 1. $P'_n(x) = (a - 2b\,x)P_{n-1}(x)$

1.2. Au rang 1 : $P'_1(x) = (a - 2b\,x)P_0(x) = a - 2b\,x$. Cette dérivée est > 0 pour $0 < x < \frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$ et < 0 pour $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2b} < x < \frac{a}{b} = \pi$. La fonction P_1 s'annule en zéro et en π, est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Elle admet un maximum en $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2b}$. Si on suppose que P_{n-1} a ces trois propriétés, au rang suivant n, la fonction P_n s'annule aussi en zéro et en π, et d'après l'expression de **1.1**, sa dérivée est du signe de $a - 2b\,x$. Celle-ci est strictement positive pour $0 < x < \frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$ et strictement

[1] Si a est premier avec b, d'après la relation de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v : $au + bv = 1$ et par élévation au carré : $a\left(au^2 + 2buv\right) + b^2v^2 = 1$, relation qui prouve que a est premier avec b^2. En appliquant cette même propriété aux entiers b^2 et a, il advient que b^2 est premier avec a^2.

négative pour $\frac{\pi}{2}=\frac{a}{2b}<x<\frac{a}{b}=\pi$. Donc P_n est aussi strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$. Elle admet aussi un maximum en $\frac{\pi}{2}=\frac{a}{2b}$. Pour tout entier n > 0, toutes les fonctions P_n présentent ce même type de variations. $\sup\limits_{[0\ ;\ \pi]}|P_n(x)|=P_n\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$

1.4. I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0\ ;\ \pi]$, c'est un nombre positif ou nul. De plus la fonction à intégrer est une fonction continue sur $[0\ ;\ \pi]$ et qui prend une valeur strictement positive en $\frac{\pi}{2}$ qui est un point de cet intervalle. L'intégrale I_n est donc strictement positive (démo plus précise dans un autre sujet posé en 2013)..

1.5. Le quotient de deux termes consécutifs de cette suite est : $\frac{P_n\left(\frac{a}{2b}\right)}{P_{n-1}\left(\frac{a}{2b}\right)}=\frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)}{n}$. Pour tout entier n supérieur au nombre $\frac{a^2}{2b}$, ce quotient est plus petit que $\frac{1}{2}$, nombre strictement plus petit que 1. C'est un critère de convergence vers zéro de la suite.

Puisque $0<I_n\leq\int_0^{\pi}P_n\left(\frac{a}{2b}\right)dx=\pi\, P_n\left(\frac{a}{2b}\right)$, la suite (I_n)est minorée par la suite nulle et majorée par une suite convergeant vers zéro. D'après le théorème des gendarmes, cette suite converge elle aussi vers zéro.

2.1. Pour $0\leq k\leq n-1$, P_n se présentant sous forme de produit, on peut considérer la formule de dérivation d'un produit de Leibniz $f^{(k)}=\sum\limits_{j=0}^{j=k}\binom{k}{j}u^{(j)}v^{(k-j)}$ avec $u=x^n$ et $v=(a-bx)^n$. On peut écrire : $u^{(j)}(x)=\frac{n!}{(n-j)!}x^{n-j}$ et $v^{(k-j)}(x)=\frac{n!}{(n-k+j)!}(-b)^{k-j}\,(a-bx)^{n-k+j}$ pour des ordres de dérivation convenables.

Elle donne ici : $P_n^{(k)}(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{n!}{(n-j)!(n-k+j)!}x^{n-j}\times(-b)^{k-j}(a-bx)^{n-k+j}$ ce qui est licite car pour tout $j\leq k$, les entiers $n-j$ et $n-k+j$ sont tous les deux strictement positifs. Il s'ensuit qu'en zéro aussi bien qu'en $\frac{a}{b}$, chacun des termes de la somme s'annule puisque il s'y présente à la fois un terme en x et un terme en $(a-bx)$ dont l'exposant est strictement positif . Dans ces cas-là : $P_n^{(k)}(0)=P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)=0$

2.2. Pour $n \le k \le 2n$, la formule de Leibniz peut être reconduite à condition de convenir que lorsque l'ordre de dérivation d'un terme du produit dépasse *n*, la dérivée correspondante est nulle.
En zéro, il y a un seul terme de la somme qui ne s'annule pas, celui où on a dérivé *n* fois exactement la fonction *u* (c'est-à-dire celui tel que $j = n$) : $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(2n-k)!(k-n)!} a^{2n-k}(-b)^{k-n}$

Si l'on pose $k = n + i$ (avec $0 \le i \le n$ par conséquent) : $\dfrac{k!}{(2n-k)!(k-n)!} = \dfrac{(n+i)!}{(n-i)!\, i!} = \dfrac{(n+i)!}{n!}\dbinom{n}{i}$, nombre qui est manifestement un nombre entier naturel. $P_n^{(k)}(0)$ est donc un entier relatif.

En $\dfrac{a}{b}$, il y a un seul terme de la somme qui ne s'annule pas, celui où on a dérivé *n* fois exactement la fonction *v* (c'est-à-dire celui tel que $k - j = n$). On obtient : $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{k!}{(k-n)!(2n-k)!} a^{2n-k}(-1)^n b^{k-n}$ et on conclut de la même manière qu'en zéro.

2.3. P_n est un polynôme de degré $2n$. Ses dérivées d'ordre $\ge 2n+1$ sont nulles. Dans ces cas-là : $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 0$

3.1. On ne perd pas de vue que P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières relatives aussi bien en zéro qu'en $\dfrac{a}{b} = \pi$.

Par une première i.p.p. : $I_n = \int_0^{a/b} P_n(x)\sin x\, dx = \left[-P_n(x)\cos x\right]_0^{a/b} + \int_0^{a/b} P_n'(x)\cos x\, dx$.
Le crochet est un nombre entier d'après la question précédente. Reste à s'occuper de l'intégrale restante :

$\int_0^{a/b} P_n'(x)\cos x\, dx = \left[P_n'(x)\sin x\right]_0^{a/b} - \int_0^{a/b} P_n^{(2)}(x)\sin x\, dx$. Le crochet est nul puisque le sinus prend la valeur zéro aussi bien en zéro qu'en $\dfrac{a}{b} = \pi$. Reste à s'occuper de l'intégrale restante.

$$\int_0^{a/b} P_n^{(2)}(x)\sin x\, dx = \left[-P_n^{(2)}(x)\cos x\right]_0^{a/b} + \int_0^{a/b} P_n^{(3)}(x)\cos x\, dx$$

Le crochet est un nombre entier relatif d'après la question précédente. Reste à s'occuper de l'intégrale restante.
On va continuer comme ça, en obtenant un coup un crochet nul, un coup un crochet entier relatif, et en augmentant à chaque fois d'un rang l'ordre de dérivation. Au bout d'une succession de $2n+1$ i.p.p il n'y aura plus à « s'occuper de l'intégrale restante » car on sera arrivé à devoir intégrer la fonction nulle. I_n sera la somme de nombres tous entiers relatifs. (Vu qu'on a démontré $I_n > 0$, cette somme d'entiers relatifs doit être au bout du compte un nombre entier strictement positif)

3.2. En supposant que π est rationnel, on a donc démontré d'une part que I_n est une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers zéro et d'autre part que tous les I_n sont des nombres entiers. Ces deux propositions sont contradictoires, une suite d'entiers strictement positifs ne peut converger que si elle stationne sur un entier strictement positif. Notre hypothèse de rationalité de π doit être abandonnée.

3. Développement en série de Engel

1. La série de termes positifs (S_n) est majorée terme à terme par la série géométrique de premier terme $\frac{1}{a_0}$ et de raison $\frac{1}{a_0}$ qui est une série convergente de limite $\left(\frac{1}{a_0}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{a_0}}=\frac{1}{1-a_0}$. Elle est donc elle-même convergente vers une limite inférieure ou égale à $\frac{1}{1-a_0}$.

On peut ajouter que cette limite est strictement supérieure à $\frac{1}{a_0}$, qui est le premier terme de la somme.

2.1 **à** **2.3.** La suite (x_n) est définie par la formule de récurrence : $x_{n+1}=\left(1+E\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)x_n-1=x_n+x_n\,E\left(\frac{1}{x_n}\right)-1$

Le premier terme de cette suite est par hypothèse un nombre réel strictement positif.

Or pour tout nombre réel strictement positif , $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$ et par conséquent : $1-x<x\,E\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$.

Supposons que pour un rang n x_n soit un réel strictement positif. Alors : $0<x_{n+1}=x_n+x_n\,E\left(\frac{1}{x_n}\right)-1\leq x_n$.

La stricte positivité des termes de la suite (x_n) est héréditaire.
La suite (x_n) est bien définie et il s'agit d'une suite de réels strictement positifs. En prime, on obtient la décroissance de la suite (x_n). Cette suite est de ce fait majorée par 1.

La suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est une suite croissante et minorée par 1, et vu que la fonction partie entière est une fonction croissante, la suite $1+E\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est une suite croissante et minorée par 2.

Au passage, on peut noter que puisque $x_1=a_0x_0-1$ et que : $x=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_0}[a_1,a_2,\ldots]$, le nombre x_1 admet lui-même un développement en série de Engel qui est : $x_1=[a_1,a_2,\ldots]$.

2.4. Considérons la suite : $\left(S_{n-1}+\frac{x_n}{a_0\ldots a_{n-1}}\right)$. Si on compare deux termes consécutifs, ils sont égaux : $S_n+\frac{x_{n+1}}{a_0\ldots a_n}=S_{n-1}+\frac{1}{a_0\ldots a_n}+\frac{a_nx_n-1}{a_0\ldots a_n}=S_{n-1}+\frac{x_n}{a_0\ldots a_{n-1}}$. Il s'agit là d'une suite constante, tous ses termes sont égaux à son premier terme, lequel vaut : $S_0+\frac{x_1}{a_0}=\frac{1+x_1}{a_0}=\frac{1+(a_0x-1)}{a_0}=x$

Du fait que la suite (x_n) est majorée par 1, la limite quand n tend vers l'infini de la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{a_0\ldots a_n}\right)$ est nulle, et x représente bel et bien la limite de la suite (S_n). Le nombre x admet un développement en série de Engel.

3.1. De manière générale : $S_n = S_{n_0-1} + \dfrac{1}{a_0 \ldots a_{n_0-1}}\left(\dfrac{1}{a_{n_0}} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n_0} \ldots a_n}\right)$. En passant à la limite : $[a_0, \ldots..] = S_{n_0-1} + \dfrac{1}{a_0 \ldots a_{n_0-1}}[a_{n_0}, \ldots...]$. Si une autre suite de Engel coïncide avec celle-ci pour ses n_0 premiers termes $b_0 = a_0$ ...; $b_{n_0-1} = a_{n_0-1}$, on a aussi : $[b_0, \ldots..] = S_{n_0-1} + \dfrac{1}{a_0 \ldots a_{n_0-1}}[b_{n_0}, \ldots...]$. L'égalité des deux limites à gauche des signes égale équivaut à l'égalité des deux limites à droite des signes égale.

3.2. Vu la question 1, on peut dire que : $\dfrac{1}{a_0} < x \le \dfrac{1}{a_0 - 1}$. D'où on déduit d'une part que $\dfrac{1}{x} < a_0$ et d'autre part que $a_0 \le \dfrac{1}{x} + 1$. Par conséquent, a_0 est l'unique entier se trouvant dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{x} ; \dfrac{1}{x} + 1\right]$. Quant à lui, $E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est par définition de la partie entière l'unique entier se trouvant dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{x} - 1 ; \dfrac{1}{x}\right]$. Ces deux entiers diffèrent exactement d'une unité.

3.3. La question **3.2** montre que $[a_0, a_1, \ldots] = [b_0, b_1, \ldots] \Rightarrow a_0 = b_0$ et si on y adjoint le résultat de la question **3.1**, on obtient : $[a_0, a_1, \ldots] = [b_0, b_1, \ldots] \Rightarrow \begin{cases} [a_1, a_2 \ldots] = [b_1, b_2 \ldots] \\ a_0 = b_0 \end{cases}$. Dès lors, il suffit d'itérer cette implication, l'égalité $[a_0, a_1, \ldots] = [b_0, b_1, \ldots]$ implique de proche en proche que $a_n = b_n$ pour tout entier naturel n. Tout réel de $]0 ; 1]$ admet un et un seul développement en série de Engel.

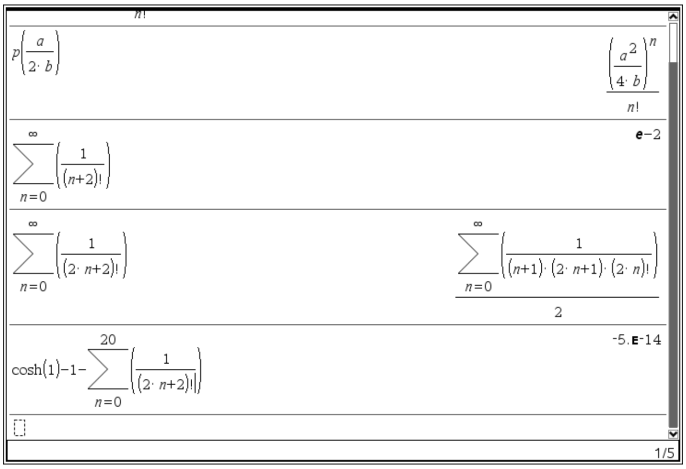
4.1. $[a_0, a_1, \ldots] = \sum_{n \ge} \dfrac{1}{c^{n+1}} = \dfrac{1}{c-1}$

4.2. $[a_0, a_1, \ldots] = \sum_{n \ge 0} \dfrac{1}{(n+2)!} = \mathbf{e} - 2$

4.3.

$$[a_0, a_1, \ldots] = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots = \sum_{n \ge 0} \frac{1}{(2(n+1))!} = \cosh(1) - 1$$

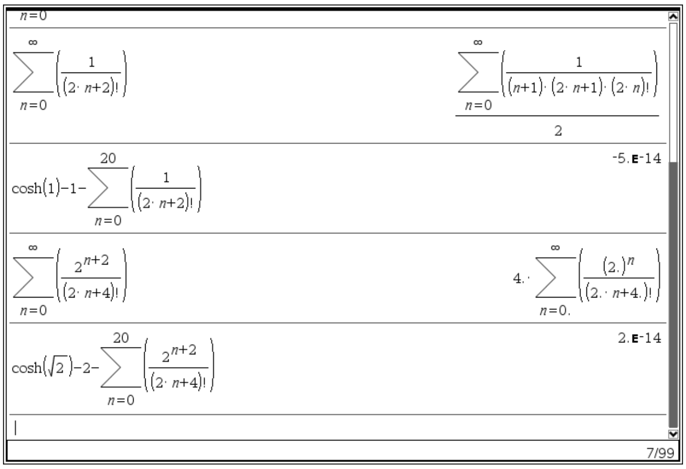
Le logiciel nSpire trouve **4.2** mais non pas **4.3**. Cependant, la comparaison de la limite présumée avec un terme de rang élevé est très encourageante.



5.

$\cosh\left(\sqrt{2}\right)-2=\dfrac{2^2}{4!}+\dfrac{2^3}{6!}+\dfrac{2^4}{8!}+...=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{2^{n+2}}{(2n+4)!}$. On est amené à poser : $a_0=\dfrac{2^2}{4!}=\dfrac{2}{4\times 3}$ et de manière plus générale : $a_n=\dfrac{2}{(2n+4)\times(2n+3)}$.

Les résultats affichés ci-contre sont encourageants quant à l'exactitude de notre résultat.



6. Sens réciproque : Supposons que la suite (a_n) stationne à partir d'un certain rang n_0 : $a_n=c$ pour $n\geq n_0$. Alors : $x=S_{n_0-1}+\dfrac{1}{a_0\,a_1...a_{n_0-1}}\times\dfrac{1}{c-1}$, qui est un rationnel.

Sens direct : Supposons que : $x=\dfrac{p_0}{q}$ (avec p_0 et q non nécessairement premiers entre eux, de toute façon cette propriété va se perdre après itération).

Soit : $q=p_0\,u_0+r_0$ la division euclidienne du dénominateur par le numérateur, avec $0\leq r_0<p_0$.

Ou bien $r_0=0$, auquel cas x est l'inverse d'un entier $x=\dfrac{1}{u_0}=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(u_0+1)^{n+1}}$, la suite associée est une suite constante.

Ou bien $r_0>0$, auquel cas, $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=E\left(\dfrac{q}{p_0}\right)=u_0=\dfrac{q-r_0}{p}$. Le nombre a_0 est : $a_0=1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{p+q-r_0}{p}$

et le nombre x_1 est : $x_1=[a_1,a_2,...]=a_0\,\dfrac{p_0}{q}-1=\dfrac{p_0-r_0}{q}$.

On itère le raisonnement avec maintenant : $x_1=\dfrac{p_0-r_0}{q}=\dfrac{p_1}{q}$.

Soit $q=p_1\,u_1+r_1$ la division euclidienne du dénominateur par le numérateur, avec $0\leq r_1<p_1<p_0$.

Ou bien $r_1=0$ auquel cas x_1 est l'inverse d'un entier $x_1=\dfrac{1}{u_1}=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(u_1+1)^{n+1}}$, la suite $[a_1,a_2,...]$ associée est constante et la suite $[a_0,a_1,...]$ stationne à partir du rang 1.

Ou bien $r_1>0$, auquel cas le nombre x_2 est : $x_2=[a_2,a_3,...]=a_1\,\dfrac{p_1}{q}-1=\dfrac{p_1-r_1}{q}=\dfrac{p_2}{q}$ …

Soit $q=p_2\,u_2+r_2$ la division euclidienne du dénominateur par le numérateur, avec $0\leq r_2<p_2<p_1<p_0$.

Ou bien $r_2=0$ auquel cas x_2 est l'inverse d'un entier $x_2=\dfrac{1}{u_2}=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(u_2+1)^{n+1}}$, la suite $[a_2,a_3,...]$ associée est constante et la suite $[a_0,a_1,...]$ stationne à partir du rang 2. Ou bien, ….

En itérant le raisonnement, on crée une suite décroissante d'entiers strictement positifs p_i. La décroissance est stricte tant que la division euclidienne du dénominateur par le numérateur ne donne pas un reste nul. Une suite décroissante d'entiers positifs étant nécessairement stationnaire, au bout d'un nombre fini d'itérations cette circonstance va se produire. La suite (a_n) est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exemple : $x=\frac{61}{200}$. Successivement : $200=3\times 61+17$, $a_0=4$; $x_1=\frac{44}{200}=\frac{11}{50}$ puis $50=4\times 11+6$, $a_0=5$; $x_2=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$ qui est l'inverse d'un entier et finalement : $\frac{61}{200}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{4\times 5}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{11}\right)^n$