CAPES 1992 épreuve 2, à propos du réseau $\mathbf{Z}^2$ Problème 1

Le sujet de l'épreuve 2 de la session 1992 du CAPES porte sur le réseau $\boldsymbol{Z}^2$, à l'instar d'un sujet de la session 2017.

Je vais découper ce sujet en trois épisodes quasiment indépendants et voici le premier épisode.

Dans ce sujet, le plan affine euclidien orienté et rapporté à un repère est assimilé au plan complexe et le réseau de « points à coordonnées entières » ou de façon abrégée de « points entiers » dont il a été question dans le sujet CAPES 2017 est défini comme étant l'ensemble $\mathbf{Z}[i]=\{a+b\,i\ ;\ (a,\ b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$. Il s'agit de l'ensemble des nombres complexes dont les deux parties, réelle et imaginaire, sont des entiers relatifs.

Le thème abordé ici est :

- *Existe-t-il des polygones réguliers du plan complexe dont les sommets sont des points entiers ?*

1. Le sujet

Partie A : Question préliminaire

1.1. Soit θ un nombre réel et n un entier strictement positif. Montrer que : $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta.\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$.

1.2. En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes tels que pour tout n entier strictement positif P_n vérifie les propriétés suivantes :

- P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers et unitaire (c'est-à-dire tel que le coefficient de X^n soit égal à 1).
- Pour tout réel θ : $P_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$

2. Soit θ un nombre réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ soit un rationnel. Montrer que $(2\cos\theta)$ est solution d'une équation de la forme $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ où n est un entier strictement positif et les coefficients a_i sont des entiers relatifs.

3. Soit θ un nombre réel. On suppose que $\dfrac{\theta}{\pi}$ et $\cos\theta$ sont tous deux des rationnels. Montrer qu'alors $\cos\theta\in\left\{-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right\}$. (On pourra commencer à montrer que toute solution rationnelle de l'équation $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ est un entier relatif).

Partie B : Application aux polygones réguliers à sommets entiers

Dans cette partie, n désigne un entier ≥ 3. On rappelle qu'une suite $(A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n)$ de n points distincts du plan définit un polygone régulier convexe P ayant pour sommets ces n points s'il existe une rotation r d'angle $\pm\frac{2\pi}{n}$ telle que : $r(A_i)=A_{i+1}$ pour $i=1,\ldots,\ n-1$ et $r(A_n)=A_1$. On sait qu'une telle rotation est unique. On convient d'écrire $P=(A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n)$. Le centre Ω de la rotation s'appelle le centre de P.

1. Soit $P=(A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n)$ un polygone régulier convexe dont les n sommets sont des points entiers. Soit Ω son centre.

1.1. Montrer que Ω est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets de P et en déduire que Ω est à coordonnées rationnelles.

1.2. En notant ω l'affixe de Ω rappeler la représentation complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ (resp. $-\frac{2\pi}{n}$).

1.3. En écrivant que $r(A_1)=A_2$, montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ sont des rationnels. En déduire que $n=4$ c'est-à-dire que P est un carré.

2. Soient A_1 et A_2 deux points entiers distincts. Montrer que les deux carrés $C=(A_1,\ A_2,A_3.\ A_4)$ et $C'=(A_1,\ A_2,A'_3.\ A'_4)$ dont A_1 et A_2 sont deux sommets consécutifs ont tous leurs sommets entiers. Préciser les coordonnées de $A_3,\ A_4,A'_3.\ A'_4$ en fonction de celles de A_1 et A_2.

À suivre ...

2. Eléments de correction

Partie A : Question préliminaire

1.1. En appliquant la formule de trigonométrie $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ avec $p=(n+1)\theta$ et $q=(n-1)\theta$, on obtient :

$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\frac{(n+1)\theta+(n-1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta-(n-1)\theta}{2}=2\cos n\theta.\cos\theta$, ce qui revient à la relation demandée, relation équivalente à celle-ci : $2\cos(n+1)\theta=(2\cos n\theta)\times(2\cos\theta)-2\cos(n-1)\theta$

1.2. Clairement : $P_0(X)=1$; $P_1(X)=X$.

En appliquant la formule **1.1.** avec $n=1$, on obtient :

$\cos(2\theta)=2\cos\frac{(n+1)\theta+(n-1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta-(n-1)\theta}{2}=2\cos^2\theta-1$ ou aussi bien :

$2\cos(2\theta)=4\cos^2\theta-2=(2\cos\theta)^2-2$ ce qui amène à définir le polynôme P_2 par : $P_2(X)=X^2-1$

Plus généralement, soit $n\geq 2$ un rang pour lequel on suppose construits les polynômes de rangs $n-1$ et n, vérifiant toutes les conditions requises.

Alors la relation **1.1** telle que nous l'avons écrite s'interprète ainsi : $2\cos(n+1)\theta \underset{gj}{=} (P_n(2\cos\theta))\times(2\cos\theta)-2(P_{n-1}(2\cos\theta))=P_{n+1}(2\cos\theta)$ où P_{n+1} est le polynôme défini par : $P_{n+1}(X)=X.P_n(X)-2P_{n-1}(X)$

Si P_n et P_{n-1} sont à coefficients entiers relatifs, alors $X.P_n(X)-2P_{n-1}(X)$ aussi (opérations sur les coefficients internes à l'ensemble des entiers)

D'autre part, le degré de $X.P_n(X)-2P_{n-1}(X)$ est le même que celui de $X.P_n(X)$ soit $n+1$ (P_{n-1} est de degré strictement inférieur) et le terme de plus haut degré est égal à 1 (puisque X et $P_n(X)$ sont tous deux unitaires).

Les conditions : $_{gilbertjulia2018}\begin{cases} P_1(X)=X \;\;;\;\; P_2(X)=X^2-2 \\ \forall n\in N^*\;:\; P_{n+1}(X)=X.P_n(X)-2P_{n-1}(X) \end{cases}$ définissent par récurrence une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes convenables.

2. Soit θ un nombre réel tel que $\frac{\theta}{\pi}$ soit un rationnel. Il existe deux entiers p, q tels que : $\frac{\theta}{\pi}=\frac{p}{q}$.

Alors : $q\theta=p\pi$ et $\cos(q\theta)=\cos(p\pi)=\pm 1$. En conséquence : $_{gjulia}\;P_q(2\cos\theta)=\pm 1$.

$2\cos\theta$ est une racine de l'un ou l'autre des deux polynômes P_q-1 ou P_q+1, tous deux unitaires à coefficients entiers.

3. De façon générale, soit P un polynôme à coefficients entiers : $P(X)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ avec $a_0\, a_n \neq 0$.

Pour tout rationnel mis sous forme irréductible $\frac{p}{q}$:

$q^n\, P\left(\frac{p}{q}\right) =_{\text{gilbertjulia 2018}} \sum_{k=0}^{k=n} a_k\, p^k q^{n-k} = a_0 q^n + a_1 p\, q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q\, p^{n-1} + a_n p^n$ de sorte que :

$$q^n\, P\left(\frac{p}{q}\right) = q\left(a_0 q^{n-1} + a_1 p\, q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}\right) + a_n p^n = a_0\, q^n + p\left(a_1 q^{n-1} + \ldots + a_n p^{n-1}\right)$$

Si ce rationnel est racine de P, : $q^n\, P\left(\frac{p}{q}\right)=0$; d'une part q divise $a_n p^n$ et d'autre part p divise $a_0\, q^n$.

Puisque p et q sont premiers entre eux, q est premier avec p^n et p est premier avec q^n . Le théorème de Gauss permet d'affirmer que d'une part q divise a_n et d'autre part (chose inutile ici) que p divise a_0.

En particulier, si $a_n = 1$ alors $q = \pm 1$. Un polynôme unitaire à coefficients entiers ne peut admettre comme racine rationnelle qu'un nombre entier relatif.

Donc si $2\cos\theta$ est racine de P_n, alors c'est un nombre entier relatif. Puisque $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, les seuls entiers possibles sont -2, -1, 0, 1 et 2. On en déduit que $\cos\theta \in_{gj} \left\{-1,\, -\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2},\, 1\right\}$

On en déduit par contraposition une condition suffisante pour qu'un réel θ soit non commensurable avec le nombre π :

Soit θ un nombre réel tel que $\cos\theta$ soit un rationnel distinct de 0 ; $\pm\frac{1}{2}$; ± 1. Alors θ et π ne sont pas commensurables (c'est-à-dire que leur quotient n'est pas un nombre rationnel).

NB. Cette propriété servira à une occasion dans le problème 2.

Partie B : Application aux polygones réguliers à sommets entiers

1. Une application affine conservant les barycentres, l'image par une application affine de l'isobarycentre d'une famille de points est l'isobarycentre de la famille image.

Lorsqu'une famille de points $\{A_1,\ A_2,...,\ A_n\}$ est globalement invariante par une application affine, l'image de l'isobarycentre de cette famille est ce même point : cet isobarycentre est un point invariant par l'application affine.

Soit $P=(A_1,\ A_2,...,\ A_n)$ un polygone régulier de centre *Ω*.. Son image par *r* est le polygone régulier $P'=(A_n,\ A_1,...,\ A_{n-1})$, c'est-à-dire que *P* est globalement invariant par *r*. L'isobarycentre de la famille $\{A_1,\ A_2,...,\ A_n\}$ est nécessairement le centre de rotation, seul point invariant par *r*.

L'isobarycentre d'une famille de points A_i a pour coordonnées des combinaisons rationnelles de leurs coordonnées. Puisque tous les points A_i ont des coordonnées rationnelles, leur isobarycentre a des coordonnées rationnelles.

2. *r* étant la rotation de centre *Ω*. et d'angle $\theta=\pm\dfrac{2\pi}{n}$, sa représentation complexe est : $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que soit $z'-\omega=\exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right).(z-\omega)$ soit $z'-\omega=\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{n}\right).(z-\omega)$. On peut désormais supposer, quitte à modifier l'ordre de numérotation, que $z'-\omega=\exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right).(z-\omega)$

En particulier, puisque $r(A_1)=A_2$: $a_2-\omega=\exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right).(a_1-\omega)$; si on note $a_i=x_i+y_i\,\mathbf{i}$ et $\omega=u+v\,\mathbf{i}$ $(i=1,..2)$, on obtient : $\begin{cases} x_2-u=(x_1-u)\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)-(y_1-v)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \\ y_2-v=(x_1-u)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+(y_1-v)\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \end{cases}$ où les $x_i,\ y_i$; $i=1,\ 2$ sont des entiers relatifs et *u* et *v* des rationnels.

Les deux réels $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)=\dfrac{(x_2-u)(x_1-u)+(y_1-v)(y_2-v)}{(x_1-u)^2+(y_1-v)^2} \\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)=\dfrac{(x_1-u)(y_2-v)-(x_2-u)(y_1-v)}{(x_1-u)^2+(y_1-v)^2} \end{cases}$ sont alors deux rationnels, car ils s'expriment sous forme de cocktails de rationnels.

Parmi les diverses possibilités offertes à $\cos\theta$, cela élimine les possibilités $\cos\theta=\pm\dfrac{1}{2}$ car dans ces cas le sinus n'est pas rationnel. Il en subsiste trois. Mais si $\cos\theta=\pm1$, *r* est la symétrie centrale de centre *Ω*.
La configuration serait réduite à une paire de points $\{A_1,\ A_2\}$, éventualité exclue par la condition $n\geq 3$.

Seule survivante, l'éventualité $\cos\theta=0$, auquel cas $\dfrac{2\pi}{n}\equiv\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ puis $n=4$ (unique possibilité) ; *r* est un quart de tour de centre *Ω*, et *P* est un carré.

Réciproquement, si A_1, A_2 sont deux points à coordonnées entières, il existe deux carrés dont ils sont sommets consécutifs, l'un direct l'autre indirect.

- *Carré direct* : le point A_4 est image de A_2 par la rotation de centre A_1 et d'angle droit direct, A_3 est image de A_1 par la rotation de centre A_2 et d'angle droit indirect. De la sorte : $\begin{cases} z_4 - z_1 = \mathbf{i}(z_2 - z_1) \\ z_3 - z_2 = -\mathbf{i}(z_1 - z_2) \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} (x_4 - x_1) + \mathbf{i}(y_4 - y_1) = -(y_2 - y_1) + \mathbf{i}(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) + \mathbf{i}(y_3 - y_2) = -(y_2 - y_1) + \mathbf{i}(x_2 - x_1) \end{cases}$. Les x_3, y_3, x_4, y_4 se déduisent des x_1, y_1, x_2, y_2 à l'aide uniquement d'additions ou de soustractions ; ce sont des entiers.
- *Carré indirect* : le point A_4 est image de A_2 par la rotation de centre A_1 et d'angle droit indirect, A_3 est image de A_1 par la rotation de centre A_2 et d'angle droit direct. De la sorte : $\begin{cases} z_4 - z_1 = -(z_2 - z_1) \\ z_3 - z_2 = \mathbf{i}(z_1 - z_2) \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} (x_4 - x_1) + \mathbf{i}(y_4 - y_1) = (y_2 - y_1) - \mathbf{i}(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) + \mathbf{i}(y_3 - y_2) = (y_2 - y_1) - \mathbf{i}(x_2 - x_1) \end{cases}$. Les x_3, y_3, x_4, y_4 se déduisent des x_1, y_1, x_2, y_2 à l'aide uniquement d'additions ou de soustractions ; ce sont des entiers.

En résumé les seuls polygones réguliers à points entiers sont des carrés et étant donnés deux points entiers distincts, ils sont les sommets consécutifs de deux carrés à points entiers.